昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2014年7月1日発行　第52巻7号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

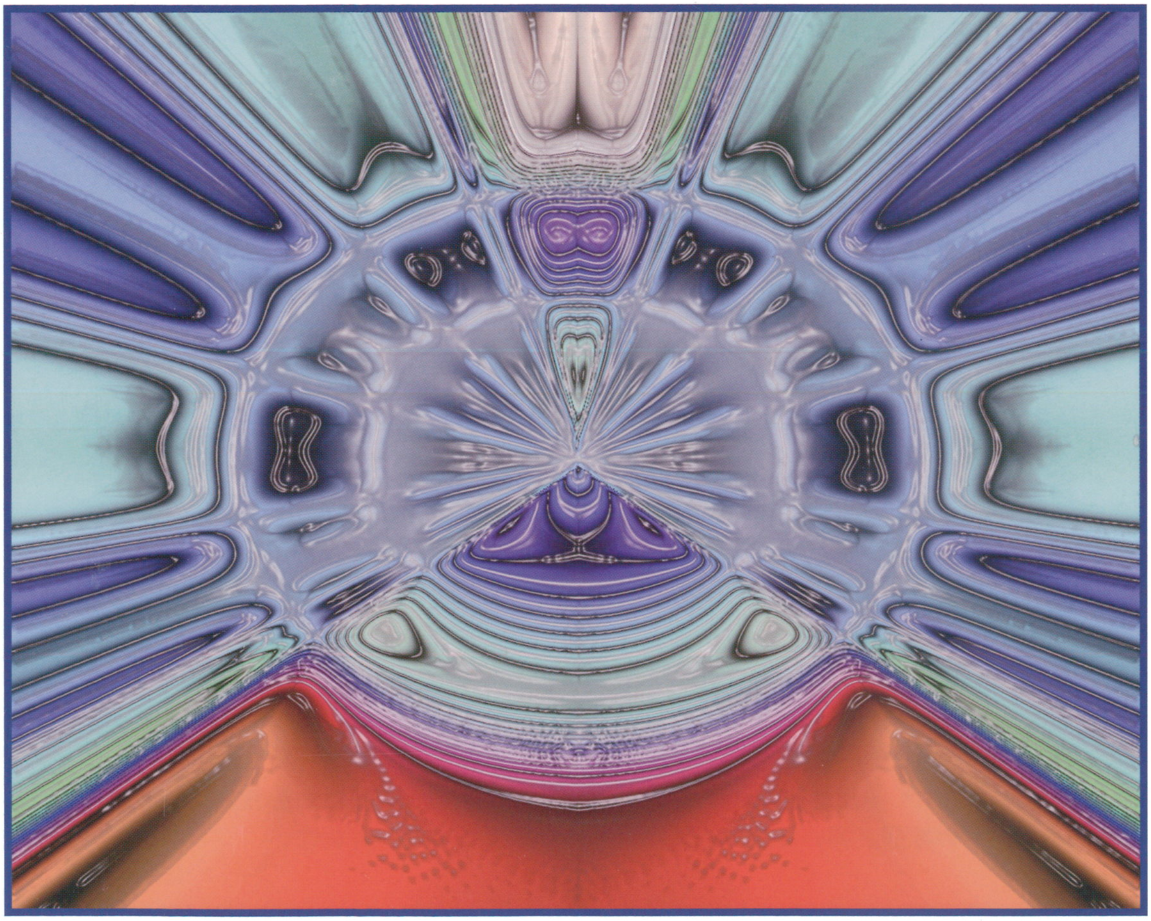
数理科学

7
2014

特集

モノポールの謎

数理物理における尽きない魅力に迫る



No.613
サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 613 July 2014

モノポールの謎

数理物理における尽きない魅力に迫る

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間（本誌のみ）11,000円，半年間（本誌のみ）5,500円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2011年/6 省略

2011年/7 〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説

2012年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ[物理編]
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想[物理編]
/7 数学と物理における格子
/8 導来圏をめぐって
/9 ハイゼンベルク
/10 超弦理論の数理
/11 物理と数学における厳密解
/12〈振動する〉物理

2013年/1 表現論の世界
/2 《量子化》の発想
/3 光と物理学
/4 解析学における様々な発想
/5 次元の作法
/6 発展する統計力学
/7 群と物理学
/8 エネルギーを通して物理学を知る
/9 ボーア
/10 分類する《数理科学》
/11 理論物理と実験物理の交錯
/12 物理学における存在とは

2014年/1 波と粒子
/2 利用する物理
/3 幾何学における様々な発想
/4 物理現象における表現の多様さ
/5 数理科学における代数的構造
/6 数学と物理における空間概念

数理科学臨時別冊一覧

13年/7 現代宇宙論講義
13年/8 クォーク・ハドロン物理学入門
13年/9 統計力学から理解する 超伝導理論
13年/12 量子力学ノート
14年/1 量子情報と時空の物理
14年/2 弦理論と行列模型
14年/3 ディラック方程式
14年/4 ホログラフィー原理と量子エンタングルメント
14年/5 パーコレーション理論講義
14年/6 格子模型の数理物理

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店八王子店
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂池袋本店
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
MARUZEN多摩センター店
ジュンク堂吉祥寺店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂盛岡店
丸善津田沼店
ジュンク堂新潟店
ジュンク堂甲府岡島店
MARUZEN & ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂京都店
ジュンク堂三宮店
ジュンク堂三宮駅前店
ジュンク堂大分店
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂旭川店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂仙台本店
ジュンク堂秋田店
ジュンク堂郡山店
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北1店）
九州大学（理系）

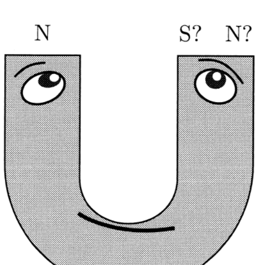
July 2014　MATHEMATICAL SCIENCES　Number 613

特集／モノポールの謎

巻頭言

荒 船　次 郎

新粒子の予言と発見は物理学の大きな魅力で，発展のためにも重要である．昨年ノーベル物理学賞で話題となったヒッグス粒子もその種の粒子の一つだが，1964 年の予言から半世紀を経て発見された．その一方，モノポールと呼ばれる新粒子は 1931 年に天才物理学者ディラック（Dirac）が予言して以来，さらに長い間未発見である．しかしこの粒子は大変魅力的で理論的に豊かな内容を秘めているため，未発見であっても，物理学の理論家と実験家を絶えず刺激し続け，素粒子物理学を発展させただけでなく，最近では，物性物理学にもディラックのモノポールに類似した性質を持ったモノポール的準粒子の存在が予想され，また，物理学と数学の境界でも，モノポール解について興味ある研究が行われているようである．



通常の磁石は常に N 極と S 極の対だが，N 極だけ（あるいは S 極だけ）の磁石がモノポールである．未発見だが，モノポールは物理学者や数学者をその不思議な魅力で刺激し続ける．

この謎に満ちたモノポールは，通常の磁石がすべて北を向く N 極と逆を向く S 極の両方の極を持つのに対し，一方の N 極（または S 極）だけを持つ．

その第一の魅力は，これさえあれば，電子の電荷と陽子の電荷が，符号は逆だが，大きさは等しいのはなぜか，より一般には，電荷の比は常に整数比であるのはなぜか，という大問題が説明できることである．電荷の量子化が導かれるその美しさに，もし自然がモノポール概念を利用しなかったら私は驚くだろう，とディラックは述べている．この説明は，当時できたばかりの量子力学のゲージ理論に対するディラックの深い理解と洞察がなければできなかった仕事であろう．あるいはディラックのモノポール理論によって，ゲージ理論の理解がより深まったと言っても過言ではない．

もう一つの魅力は，1974 年に提案されたトフーフト（t'Hooft）とポリヤコフ（Polyakov）によるモノポール理論にある．これにより，素粒子の大統一理論にはモノポールがソリトン（孤立した波からできる複合粒子）として必然的に存在することが判明した．数学的には乱暴な短い言葉で言えば，ディラックのモノポールは，もしそれがあれば電荷が整数比になることが示せるのに対し，逆に，大統一理論は，もし大統一理論が電荷の比を必

然的に整数にする対称性を持つなら，そして，その対称性が自発的に破れて電磁気学が成立するなら，モノポールが存在しなければならないことを示せるのである．また，ディラックのモノポールは原点やひもの線上で発散する特異性があったのに対し，ソリトンとしてのモノポールには特異点はなく，どこも連続で微分可能な解であることも特徴的である．大統一理論に現れるモノポールの質量はプランク質量に迫るほど大きいことも特徴的である．また重要なことは，ソリトンは場の理論における非摂動論的な解であることで，その研究の発展に伴って，インスタントン（場の理論におけるトンネル効果現象で，構造がソリトンと似ている）の研究も含め，これまでできなかった場の理論の非摂動論的な研究が大いに発展したことである．例えばルバコフ効果（モノポールが陽子に接触すると陽子をレプトンと中間子に崩壊させる触媒効果）や，テータ真空（ある特殊なゲージ変換の固有状態になっている真空）の理論研究などもその例である．

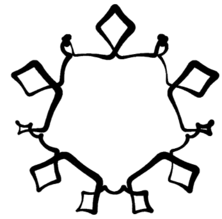
ディラックのモノポール理論，さらに，大統一理論のモノポールに魅せられた実験家による探索は様々に行われたが発見に至っていない．1975 年のプライス（Price）による気球実験でモノポールが見つかったという報告はディラックが講演で言及したほど注目されたがその後取り下げられ，1982 年にカブレラ（Cabrera）が超伝導リングでモノポールを見つけたという報告も注目されたが，その後の追試でほぼ否定された．他は見つからなかったという実験ばかりである．するとモノポールは見つからなくもよいという宇宙の「インフレーション理論」が 1981 年にグース（Guth）や佐藤勝彦によって提唱され，探索実験の熱はかなり冷めたが，宇宙や素粒子の理論は現在も未完成で，モノポールはあってもよいという理論もあって可能性が多様なため，今も地道な探索実験が行われている．実験家の提案する新しい探索のアイディアは興味深いものである．南極の $1\,\mathrm{km}^3$ の氷河を用いた IceCube 実験もその一つで，高エネルギー宇宙ニュートリノ探索の副産物としてモノポール探索実験が行われている．

また，ディラックのモノポールとは異なるが，それと類似の性質を持ったモノポール的状態が現れる物理現象があり，興味深い．物性に現れるモノポール的状態もそうで，理論と実験の両面から最近大いに研究されている．また，クォークが核子や中間子の中に閉じ込められて出て来ない現象「クォークの閉じ込め」，より一般には「カラーの閉じ込め」の機構の解明は素粒子物理学の大きな課題であるが，カラーモノポールと呼ばれる状態が深く関係して閉じ込められているという理論解析が最近大いに進展していることも興味深いことである．

ソリトンとしてのモノポール理論はとりわけ豊かな内容を秘めているが，ソリトンは非摂動的な扱いが必要なため，一般には解析が困難である．しかし，理論に高度な超対称性がある場合には，モノポールについて BPS 解と呼ばれる厳密な解があり，そのようなモノポール解を一般的に求める数学的な手法が開発された．Nahm 構成法と呼ばれるが，そこに現れる数学的な双対性が，超弦理論に現れる D ブレーンの T 双対性から理解されるという数学と物理の関わりは興味深い．また数学は私は門外漢だが数学的な Langlands 双対性と呼ばれる対応も電気と磁気の双対性，あるいは弦理論や超対称なゲージ理論に現れる S-双対性にも関連しているようで，数学と物理の接点で，広い意味でモノポールに関係した研究が進んでいることなど，広い関連もモノポールの魅力である．

（あらふね・じろう，東京大学名誉教授）

ディラック モノポール



風間 洋一

1. はじめに

ディラック（P.A.M. Dirac）が20世紀における最も天才的な物理学者の一人であることは衆目の一致するところであろう．その才能はしばしば鬼才と称され，数々の常人離れした逸話とともに，彼を「レジェンド」に祭り上げている．

こうした畏怖を伴った賞賛は決して誇張されたものではない．それは何よりもディラックの論文を読むと実感される．彼の論文はどれも非常に美しいが，その美しさは，革命的な内容が，衒いの全くない平明な論理と言葉で語られているところからくる．静かな語り口から驚くべき結論が導かれるのである．

中でもとりわけディラックの鬼才を如実に示すのが，モノポールを導入した1931年の有名な論文である[1]．これはそういう意味でディラックの論文中もっとも「美しい」ものといえるかもしれない．

周知のように，モノポールとは磁気単極子あるいは単磁極の略称であり，点電荷の磁気的対応物をさす．それは実験家の努力にもかかわらず未だ見つかっていない未知の粒子である．電磁気学の基本理論であるマックスウェル理論を習ったことがある人には，このことは非常に不思議に思えるであろう．この美しい理論に現れる電場と磁場の対称的な役割からすると，そのような対応物が存在しないのは自然界の調和を乱しているように感じられる．こうした古典的な対称性の要請からモノポールの存在を予想することは，健全ではあるが常識的な考えである．これに対して，ディラックが上記の論文でモノポールを導入した論理は，全く異なる次元の目的と考察に基づいており，はるか後に明らかになってくるように，モノポールの存在の根が非常に深い数学的構造に起因することをすでに示唆するものであった．

次節で詳しく述べるように，ディラックは電磁場中の荷電粒子を記述する量子力学的波動関数の位相にどれくらいの不定性があるかという，一見それほど重要そうでもない問題から始めて，平明な考察を重ねていく．そして気がつくと，モノポールの存在が自然に導かれると同時に，荷電粒子の電荷およびモノポールの磁荷が互いに関係しながら量子化される（飛び飛びの値をもつ）という予想外のことが言えてしまっているのである．さらに驚くべきことは，この電荷の最小単位の存在の説明こそが，ディラックの当初からの目的であったと述べられている点である．電子や陽子の電荷の大きさが同一の基本値をとり，自然界に存在する電荷の大きさが必ずその整数倍であるということを説明するのに，どうしてモノポールを導入するという考えが生まれるのか．にわかには理解しがたい発想である．

このことに関して，私は生前のディラックに直々に質問する機会に恵まれたことがある．それは1979年，私がミシガン大学の研究員をしていた

時のことである．ディラックは一般学生向けの講演のためにミシガン大学に招かれていたのだが，講演の後の物理教室の茶話会の折にチャンスが到来した*1)．うまい具合にディラックが一人になった時間があって，それ幸いと質問しに行ったように記憶しているのだが，それはともあれ，まずはモノポールの導入が本当に電荷の量子化の説明のためだったのかということを聞いてみた．これに対してディラックは穏やかだが断定的な口調で，その通りだと答え，それ以上は何も言わなかった．その場の雰囲気から，なぜそう考えたのか，とまで畳みかけることはできなかったが，もし聞いたとしてもそれは本人にも説明ができないことであったかもしれない．天才とはそういうものであろう．次にディラック方程式の負のエネルギー解の解釈に関する有名な「空孔理論*2)」の発想について聞いてみた．これに対しては，それは原子のエネルギー状態との類似を考えれば非常に簡単なことだったという答えが返ってきた．そのとき私の感じたことは，逆に言えば，ディラックはモノポール論文の発想の方をより深淵なものと認識していたのではないかということであった*3)．

少し長々と前口上を述べてきたが，いよいよディラックのモノポールそのものについて見ていこうと思う．基本的な性質を整理して説明しても良いのだが，それよりも，ディラックの発想を味わってもらうために，1931 年の原論文自体をかみ砕いて解説することにしようと思う*4)．

2. ディラックの 1931 年論文

2.1 序論

ディラックの原論文のタイトルは "Quantized Singularities in the Electromagnetic Field"，すなわち「電磁場の量子化された特異点について」，というものである．ここにはモノポールという言葉は直接的には現れていない．しかし，これから見ていくように，このタイトルにはディラックの考え方の本質が明確に反映されているのである．

ディラックはこの論文を，「物理の進展にはその理論的定式化にますます高度な数学が必要になってくる」という一文から始めている．ここにも現れているように，ディラックの数学への傾倒は非常に強いものがある*5)．そして続けて，純粋数学の力を最大限利用すべきだと説き，彼の 1930 年の空孔理論がそのささやかな一例とみなせるかもしれないと述べる．さらに，そこで導入された空孔は当初予想された陽子ではなく反電子と呼ぶべきものであると補足している．

こうしたかなり長い前置きを経て，ディラックは「本論文の目的は様々な意味で負のエネルギーに関するアイデアに匹敵する新しいアイデアを提唱することである」，と宣言する．そして，そのアイデアは電子や陽子に関するものではなく，なぜ最小の電荷が存在するのかに関するものである，と述べる．このあたりの調子には，ディラックのこの論文に対する並々ならぬ自信が感じられる．さらに続けて，この最小の電荷 e は $\frac{\hbar c}{e^2} \simeq 137$ を満たすものであることが実験的にわかっているが*6)，本理論はこの値自体を与えるものではなく，最小の電荷と最小の磁極（magnetic pole）の間の関係

*1) 実は以前にもニューヨーク大学で開催されたモノポールの会議での講演者夕食会で間近でディラックに会う機会があったのだが，そのときは黙々と北京ダックを食べるディラックに恐れ多くて話しかけることができなかった．

*2) スピン $\frac{1}{2}$ を持った粒子を相対論的に記述するディラック方程式の解として負のエネルギーを持った状態が必然的に現れてしまう困難を，その状態がすべて占有された（負の無限大のエネルギーを持った）状態を「真空」と考え，そこに空いた「空孔（hole）」，すなわち負のエネルギー状態の欠如，が正のエネルギーを持った物理的状態として観測される，という大胆な解釈で解決する理論．

*3) ついでに記しておくと，ディラックが繰り込み理論に関して否定的な見解を持っていることを聞いていたので，それについても聞いてみたが，やはり，繰り込みで発散を処理するのは人工的であると言い，それを解決するには新しい数学が必要になるはずだということを強調していた．

*4) 電磁気学と量子力学の初歩的な知識があれば十分理解できる．

*5) 但し，昨今の素粒子論の基準からいうと，彼の言う「数学」は十分に「物理的」であり，とりわけディラックの推論自体は非常に物理的な直観に裏打ちされていると感ずる．

*6) ここで $\hbar$ は量子力学の基本定数であるプランク定数 h を 2π で割ったものであり，c は光速度である．

を与えるものになっていると述べる．そして，これは電気的現象と磁気的現象の間にこれまでに知られていない対称性があることを意味するが，137という量が1よりも非常に大きいために，電荷とモノポールの類似性がいまだ実験的に発見されていないのだと言っている．

ここまでが序論である．通常は序論を読むとだいたいその論文の論理がわかるものだが，この論文の場合，序論からはどのようにして電荷と磁荷の関係が表れるのかについては全く予想がつかない．

2.2 波動関数の非可積分な位相

さてここからが本論だが，ディラックは「その運動が波動関数 $\psi(x,y,z,t)$ で表される一つの粒子を考える」，と切り出す．電荷や磁荷のような電磁気的対象とは一見関係のない話から入るのである．アインシュタインの特殊相対論の論文において，「同時刻の定義」という予想外の側面から入るのと似ている．以下では「ディラックは」という主語は省いて，彼の理論の内容を客観的に追うことにしよう．

一般に，粒子の波動関数 $\psi(x)$ は振幅 $A(x)$ と位相 $\gamma(x)$ という二つの実関数を用いて $\psi(x)=A(x)e^{i\gamma(x)}$ のように書くことができる．（以下では簡単のため (x,y,z,t) を x と略記することにする．）$\psi(x)$ は規格化されているものとすると，それには定数の位相因子 $e^{i\gamma_0}$ を掛ける不定性があるので，$\gamma(x)$ 自体は確定した値を持たず，異なる位置 x における $\gamma(x)$ の相対的な値のみが意味を持つ．ここで次の仮定を置こう：$\gamma(x)$ の値の差は，隣接点では一意に決まるが，有限の距離だけ離れた点の間の差は，2点を結ぶ経路の取り方に依存して決まる．これは力学において一般の「仕事」の定義をするときに現れるなじみ深い性質であり，「非可積分性 (non-integrability)」と呼ばれるものである．特にある点から閉じた曲線に沿って一周してきたときに生ずる位相差は一般にゼロではない*7)．

さてこの位相の非可積分な不定性が物理的帰結に曖昧さを引き起こさないための条件を考えよう．量子力学における基本的な物理量は二つの波動関数の内積 $\int dx\phi^*\psi$ である．この量に位相に起因する曖昧さが生じないためには，有限の閉曲線に沿って一周して戻って来る時に生ずる位相の変化は，任意の波動関数 ϕ と ψ に対して等しく，従って積 $\phi^*\psi$ において完全にキャンセルしていなければならない．この普遍性は，非可積分な位相の変化が粒子がそのもとで運動する力の場の性質に関係していることを示唆している．

この帰結をより正確に解析するには，波動関数を

$$\psi=\psi_1 e^{i\beta} \tag{1}$$

のように，一価関数である部分 ψ_1 と，それ以外の非可積分性を生ずる部分 $e^{i\beta}$ に分解して書くのが良い．β は一価関数ではないが，隣接する点での位相差には曖昧さがないという仮定から β の微分 $\kappa_\mu\equiv\frac{\partial\beta}{\partial x^\mu}$ は定まっている*8)．一価ではないという性質は，それが次のように，可積分性（異なる変数に関する微分の順番を入れ替えたものが一致する性質）を満たさないことで表される．

$$\frac{\partial\kappa_x}{\partial y}=\frac{\partial^2\beta}{\partial y\partial x}\neq\frac{\partial\kappa_y}{\partial x}=\frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial y},\quad \text{etc.}$$

すると，（3次元空間中の）閉曲線 Γ を一周したときに生ずる位相は線積分 $\int_\Gamma\vec{\kappa}\cdot d\vec{l}$ で与えられるが，これはストークスの定理を用いて $\int_\Sigma(\vec{\nabla}\times\vec{\kappa})\cdot\vec{n}dS$ と書ける．（ここで Σ は Γ を境界とする閉曲面であり，$\vec{n}$ は Σ の各点で垂直な単位ベクトルを表す．）この量は $\vec{\kappa}$ そのものではなく $\vec{\nabla}\times\vec{\kappa}$ にのみ依るから，$\Lambda(x)$ を勝手な関数として $\vec{\kappa}\to\vec{\kappa}+\vec{\nabla}\Lambda$ と置き換えても変わらない．

ここにおいて，マックスウェル理論を知っている読者は，$\kappa_\mu(x)$ が電磁場のベクトルポテンシャル $A_\mu(x)$ と同じ性質を示していることに気付くであろう．このことは，(1) の両辺の微分を考えて見ると一層明白になる．プランク定数 $\hbar$ を適当に補うと

$$-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}=e^{i\beta}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\hbar\kappa_\mu\right)\psi_1 \tag{2}$$

*7) 力学における仕事の文脈では，いわゆる「保存力」ではない力が働くときにこうした現象が起こる．

*8) ここで $x^\mu=(x,y,z,t)$ という略号を用いた．

を得るが，$A_\mu = \frac{\hbar c}{e}\kappa_\mu$ と同定すれば，ψ_1 に働いている演算子は電磁場があるときの荷電粒子の波動関数に働く（共変）微分演算子に他ならない．そして，ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ による磁束密度 $\vec{B}$ の表式 $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ を思い出せば，閉曲線を一周したときに生ずる位相 $\int_\Sigma (\vec{\nabla} \times \vec{\kappa}) \cdot \vec{n} dS$ は面 Σ を貫く磁束に比例することがわかる．

こうして，波動関数の非可積分な位相と電磁場の存在の間に関係が付く．しかし，ディラックも明言しているように，このこと自体は，数年前にワイル（H. Weyl）によって導入されたゲージ不変性[3)]の原理の言い換えにすぎない．

2.3 波動関数のゼロ点のなす曲線（nodal line）

ここからがディラックの議論の真骨頂である．それは波動関数の位相にさらなる曖昧さがあることの指摘から始まる．これまで物理的要請から「位相」β の満たすべき条件を考察してきたが，実はそこで議論されていたのは正確には「位相因子」$e^{i\beta}$ に対する条件であった．従って，位相自体には n を整数として $2\pi n$ だけの余分な任意性がある．それが離散的な値しかとらないことは，すでに考察した磁束に起因する位相が持つ性質とは異なるように見える．これを明らかにするために，まず小さな閉曲線を考えよう．波動関数の連続性から，小さな閉曲線周りの位相変化は小さいので 2π のような大きな不定性は生じ得ない．従ってこのときには以前のように位相変化はその閉曲線を貫く磁束によるものと解釈できる．

実はこの議論には一つ抜け穴がある．それは波動関数がゼロになるところでは位相が定義できないので，位相の不連続な変化が可能であるという点である．波動関数は複素数であるから，それをゼロと置くと二つの条件が得られ，従ってゼロ点は一つの曲線をなす．ディラックはこれを nodal line（節曲線）と呼んだ．この nodal line が考えている小さなループの中を通る場合には，そこでの位相は不確定となり，$2\pi n$ の不定性が生じ得るのである．この寄与を含めると，小さなループ周りの位相差は $2\pi n + \frac{e}{\hbar c}\int \vec{B} \cdot \vec{n} dS$ の形を取る．ループが大きい場合には，それを境界とするような曲面を貫くすべての nodal line の寄与を加えなければならないので，一般に

$$2\pi \sum n + \frac{e}{\hbar c}\int \vec{B} \cdot \vec{n} dS \qquad (3)$$

の形となる．特別な場合として，それ自体は nodal line を含まない無限小のループを境界とする曲面（図 1 参照）に対してこの表式を適用し，ループの大きさをゼロに持って行くと，閉じた曲面が得られるが，そのような無限小ループに沿った積分 $\int \vec{\kappa} \cdot d\vec{l}$ はゼロなので，(3) はゼロとなり，$2\pi \sum n = -\frac{e}{\hbar c}\int \vec{B} \cdot \vec{n} dS$ という式が成り立たねばならない．

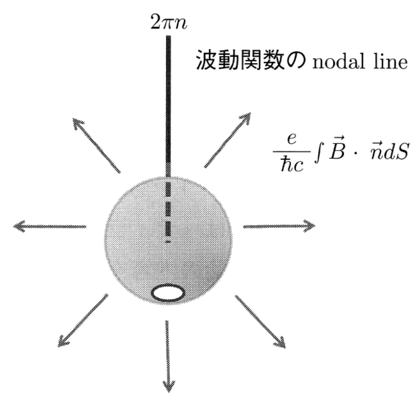


図 1　無限小のループを境界とする曲面を貫く磁束と波動関数の nodal line.

この場合 $\sum n$ はこの曲面の内部にその端点を持つ nodal line の総和と解釈される．ところが，磁束 $\int \vec{B} \cdot \vec{n} dS$ はどのような波動関数に対しても共通であるから，結局 $\sum n$ も電磁場自体の性質を表す量であり，その端点は磁場の特異点を表していると解釈される．特に nodal line が一本の場合，

$$4\pi g \equiv \int \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 2\pi n \frac{\hbar c}{e} \qquad (4)$$

と書ける[*9)]が，これは離散的な磁荷 $g = \frac{\hbar c}{2e} n$ を持つモノポールが存在することを表している．これを書き換えると

$$eg = \frac{\hbar c}{2} n \qquad (5)$$

が得られ，電荷と磁荷の積が $\frac{\hbar c}{2}$ を単位として量

*9)　ディラックは Gauss 単位系を用いているので，左辺では磁荷 g に 4π がかかっている．

子化されていなければならないことを表す．これが有名なディラックの量子化条件である．

こうしてディラックは量子力学の非常に基本的な性質と若干の仮定のみから，モノポールの存在が量子力学と整合的に許されるのみならず，電荷と磁荷が互いに互いを規定しながら量子化されるという驚くべき結論に到達するのである．

3. ウー・ヤン モノポールとファイバー束の理論

さて，ディラックの原論文においては，荷電粒子の波動関数のゼロ点の連なりとしての nodal line と位相の関係からモノポールの存在を示唆したのだが，いったんモノポールの存在を認めてしまうと，モノポールを記述するベクトルポテンシャルの性質から直接その特徴を捉えることもできる．

原点に置かれたモノポールが生み出す磁場は

$$\vec{B} = g\frac{\vec{x}}{r^3}, \quad r \equiv |\vec{x}| \tag{6}$$

で与えられ，点電荷が生み出す球対称な電場と同じ形をしている．ここまでは何も特別なことはないのだが，この磁場をベクトルポテンシャル $\vec{A}(\vec{x})$ を用いて通常のように $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ と表そうとすると，たちまち次のような困難に遭遇する．モノポールから出る全磁束は原点を囲む球面上の面積分 $\int \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS = 4\pi g$ で得られるが，これは，明らかに北半球を貫く部分からの寄与 $2\pi g$ と南半球を貫く部分からの寄与 $2\pi g$ の和と見ることができる．ところがもし $\vec{A}(\vec{x})$ がスムーズであるならば，各々の半球からの寄与は，ストークスの定理 $\int(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{n}dS = \int \vec{A}\cdot d\vec{l}$ を用いて，赤道周りの互いに逆向きの線積分 $\pm\int \vec{A}\cdot d\vec{l}$ で書くことができるから，それらの和はゼロであり，$4\pi g$ とはならない．この矛盾の原因は，$\vec{A}$ が球面上至る所で滑らかでありストークスの定理が成り立つとしたところにある．従って矛盾が起こらないためには，$\vec{A}$ は任意の半径の球面上の少なくとも 1 点で特異点を持たなければならない．この特異点自体が連続的に連なっているとすれば，それは原点から外に伸びる特異線をなす．これは通常ディラックのひも（Dirac string）と呼ばれる*10)．この特異線は以下の例で見るように，ゲージ変換によってその位置や形が変えられるものであり，従って非物理的なものである．

少し詳しくこの様子を見てみよう．モノポール磁場 (6) を与える一つの標準的なベクトルポテンシャル $\vec{A}_a$ は，球面極座標 (r,θ,ϕ) とそれに沿った成分を用いる表示で

$$(A_a)_\theta = (A_a)_r = 0,$$
$$(A_a)_\phi = \frac{g}{r\sin\theta}(1-\cos\theta) \tag{7}$$

と書ける．容易にわかるように，$(A_a)_\phi$ は $\theta=\pi$，すなわち原点から z 軸上負の方向に沿って発散する．これがディラックのひもである．さてこれに対してゲージ変換 $(A_b)_\phi \equiv (A_a)_\phi + (\vec{\nabla}f)_\phi$ を施してみよう．特にここで $f=-2g\phi$ ととると，結果は

$$(A_b)_\phi = \frac{g}{r\sin\theta}(-1-\cos\theta) \tag{8}$$

となる．ゲージ変換で得られた $(A_b)_\phi$ は，今度は明らかに $\theta=0$，すなわち z 軸の正の方向に沿って発散している．すなわち，ディラックのひもはこのゲージ変換によって 180 度方向を変えたことになる．

さてこのディラックのひもが非物理的であるならば，荷電粒子の波動関数にとってもその存在は見えないようになっていなければならない．例として $\vec{A}_a$ をとり，z 軸負の方向に伸びる特異線の周りを回る小さなループを考えよう（図 2）．このループを境界とする，モノポールを囲む閉曲面を考えると，特異線はこの閉曲面を貫かないから，その面上で $\vec{A}_a$ は完全に滑らかである．従って，ストークスの定理が使えるので，ループを一回りしたときの粒子の波動関数の位相の変化はその閉曲面を貫く磁束で与えられる．ここで特異線からくる影響のみを見るために無限に小さいループを考

*10) ディラックの原論文では，この特異線について第 4 章で触れられているが，それほど重要な意味を付与してはいない．

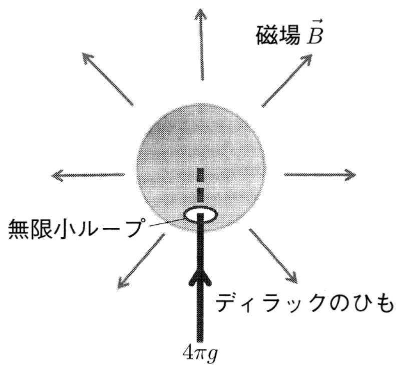


図 2　z 軸の負の方向に伸びる特異線（ディラックのひも）の周りを回る小さなループと，そのループを境界としモノポールを囲む閉曲面．小ループを 1 回りすると粒子の位相はこの閉局面を貫く磁束（図 1 参照）で与えられる．その全磁束がひもを通ってモノポールから放射されている．

えると，閉曲面は完全にモノポールを囲むから，全磁束はちょうど $4\pi g$ となる．従って波動関数の位相 γ の変化は $\Delta\gamma = \left(\frac{e}{\hbar c}\right) \cdot 4\pi g$ となるが，これが $2\pi n$ になる場合に限り波動関数自体は不変である．この条件を整理すると $eg = \frac{\hbar c}{2} n$ となり，ちょうどディラックの量子化条件が得られる．すなわち，この条件が成り立つ場合のみ，ディラックのひもは荷電粒子にとって見えない非物理的な存在になるのである．この議論はディラックの論文におけるものとは異なるが，ディラック条件を導く最も標準的な議論として知られている．

さて，こうした様々な興味深い性質が示唆している，モノポール場の持つ深い数学的な構造は，ディラックの原論文から四十年余りのちになって，ウー（T.T. Wu）とヤン（C.N. Yang）によって明らかにされた[4]．彼らのアイデアの骨子は次のようなものである．全領域で一つのベクトルポテンシャル $\vec{A}(x)$ を用いると必ず特異線を生じてしまうのならば，モノポールの周りの領域を，図 3 のように互いに重なり合う二つの領域 R_a, R_b に分けて，各々の領域では特異点を持たない，(7) および (8) で与えられるベクトルポテンシャル $\vec{A}_a$ および $\vec{A}_b$ を用いて記述すれば良いのではないか．

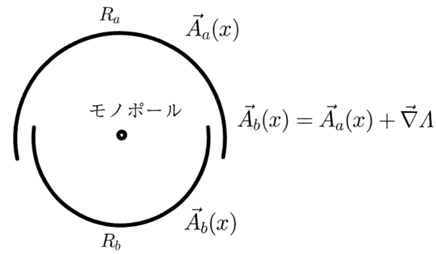


図 3　モノポール周りの領域の分解．

すでに見たように，$\vec{A}_a$ では特異線は R_b 方向にあり，$\vec{A}_b$ の特異線は R_a 方向に伸びているので，これらをペアとして用いれば完全に特異性のない記述ができる．そしてこれらのベクトルポテンシャルは，共通の領域 $R_a \cap R_b$ ではゲージ変換で結ばれているのであるから，物理的には同じ実体を表していると言える．詳しい説明は割愛せざるを得ないが，これはまさしく主 $U(1)$ ファイバー束と呼ばれるものの概念に他ならない．そして二つのベクトルポテンシャルを結ぶゲージ変換（ファイバー束の理論では「遷移関数」と呼ばれる）にどれほどの「ひねり」があるかを測る「第 1 チャーン数」と呼ばれる整数がモノポールの強さと同定される．こうして，ディラックの天才的な契機によって導入されたモノポールの背後には自然で美しい構造があることがわかったのである．

残念ながらまだモノポールは見つかっていないが，それが見つかる日は，大域的数学構造を担った基本的な粒子が自然界に存在することが初めて証明される日であり，単なる一つの新粒子の発見にとどまらない，自然の深い摂理を印象づける日となるであろう．

参考文献

1) P.A.M. Dirac, "Quantized Singularities in the Electromagnetic Field", *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **133**, 60 (1931).
2) P.A.M. Dirac, "A Theory of Electrons and Protons", *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **126**, 360 (1930).
3) H. Weyl, "Elektron und Gravitation. I", *Z. Physik*, **56**, 330 (1929).
4) T.T. Wu and C.N. Yang, "Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global Formulation of Gauge Fields", *Phys. Rev. D* **12**, 3845 (1975).

（かざま・よういち，東京大学大学院総合文化研究科）

大統一理論にあらわれるモノポール

江澤 潤一

1. はじめに

2013年のノーベル物理学賞が**ヒッグス機構**[1)]を提唱したピーター・ヒッグスとフランソワ・アングレールに授与されたことは記憶に新しい．ゲージ理論において，ゲージ場は質量項を持つことができない．しかし，ヒッグス粒子が基底状態に凝縮しヒッグス場が値を持つことで系の対称性を自発的に破り，ゲージ粒子はヒッグス場との相互作用を通して質量を獲得する．縮退した多数の基底状態の一つが実現したとき，対称性は自発的に破れた，という．宇宙の生誕直後は高温で，ヒッグス粒子は蒸発しており，宇宙は対称性が高い状態にあった．時間がたつと，ヒッグス粒子は宇宙の各点で勝手に**自発的対称性の破れた状態**（ドメイン）に凝縮してゆく（図1参照）．ドメインの境界は滑らかに均らされてゆくが，捻れが解消できない場所が発生する．**位相的欠陥**である．位相的欠陥の中心は捻れを解消するために，対称性が破れていない状態になっている．線状の位相的欠陥は宇宙紐を生成する．点状の位相的欠陥も存在し得る．点状位相的欠陥は1931年にディラックによって予言された**磁気単極子（モノポール）**[2)]に他ならない．

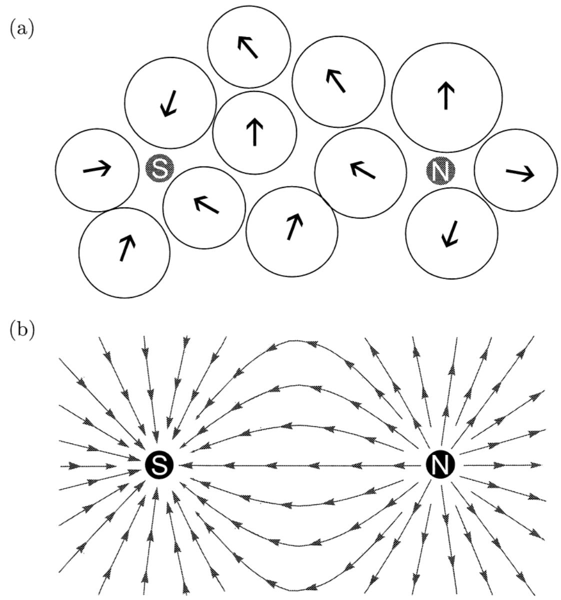


図1 (a) 宇宙誕生の直後，宇宙の各点でヒッグス粒子は任意の向きの基底状態に凝縮する．ドメインが重なると向きは均らされてゆくが，捻れが解消できない場所が発生する．(b) 十分時間がたつと，点状位相的欠陥にはモノポール（N極）か反モノポール（S極）が発生する．

自然界には，**電磁相互作用，弱い相互作用，強い相互作用**および**重力相互作用**の4種類の力が働いている．重力を除く3つの相互作用はゲージ場によって媒介されている．それぞれ，数学の記号では，$U(1)$，$SU(2)$，$SU(3)$ という対称性によって特徴付けられている．弱い（weak）相互作用の基本粒子は2種類のレプトン，強い相互作用の基本粒子は便宜的に色（color）で識別する3種類のクォークからなるので，それぞれ $SU(2)_{\mathrm{W}}$，$SU(3)_{\mathrm{C}}$ と表される．自然界で観測されている質量を持たないゲージ粒子は電磁相互作用を媒介する光子のみである．電磁対称性は $U(1)_{\mathrm{em}}$ と表す．

電磁相互作用と弱い相互作用はヒッグス機構を用いて統一できる．これを電弱統一理論という．電弱統一状態の対称性は，$SU(2)_{\mathrm{W}} \otimes U(1)_{\mathrm{Y}}$ であり，この状態では電磁力と弱い力が同種の力になり，これらのゲージ粒子は質量を持たない．宇宙の温度が対応するエネルギースケールで弱い相互作用ゲージ粒子（W，Zボソン）の質量 10^2 GeV 以上のときに実現していた．宇宙の温度が下がり，対称性が $SU(2)_{\mathrm{W}} \otimes U(1)_{\mathrm{Y}}$ から $U(1)_{\mathrm{em}}$ へ自発的に破れることにより，2種の相互作

用に差異が現れる．

力が働く距離は媒介する粒子の質量に反比例する．電磁力は光子という質量を持たない粒子が媒介するので長距離にわたって働く．弱い力は媒介となる W ボソンや Z ボソンが質量を持つので，短距離でしか働かない．

強い相互作用も統一する**大統一理論**が提唱されている．3 つの相互作用が統一される温度は，エネルギースケールで X，Y ボソンの質量 10^{15} GeV のときである．X ボソンと Y ボソンはクォークをレプトンと結びつけ，バリオン数を破り，**陽子崩壊**を可能にするゲージ粒子である．大統一された対称性が何であるかは未だ確定していない．最も単純な対称性は $SU(5)$ である．この理論によれば陽子の寿命は $10^{30} \sim 10^{32}$ 年程度であるが，神岡鉱山のカミオカンデ・スーパーカミオカンデにおける実験結果では陽子崩壊が観測されていない．実際の寿命は 10^{34} 年以上と推定される．ゆえに，単純な $SU(5)$ 大統一理論は排除されている．

正しい大統一理論の対称性 G が何であるにせよ，本稿にとって最も重要な点は，電磁対称性 $U(1)_{\rm em}$ を高い対称性をもつゲージ理論に統一すると必然的に磁気単極子（モノポール）が生まれる，ということである．また，モノポールの中心では高い対称性が回復しており，その点では 3 つの相互作用に差がなくなるので，粒子の転換が可能になる．具体的には，陽子や中性子のクォークがモノポールに引き付けられ，中心部付近を通過してレプトンに変化し陽子は崩壊[3]する．モノポールの発見は大統一理論の直接的証明になる．以下，ここに述べた諸概念を解説したい．

2. ディラック・モノポール

電場 $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, E_z)$ と電荷密度 $\rho(\boldsymbol{x})$ の関係式は，ガウスの法則により，ε_0 を誘電率として

$$\nabla \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

で与えられる．原点にある電荷 e の作る電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}\frac{\boldsymbol{x}}{r} \tag{2}$$

である．磁場 $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ はベクターポテンシャル $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ を用いて

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{3}$$

と表される．ベクターポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が正則関数なら，恒等的に

$$\nabla \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \nabla(\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0 \tag{4}$$

となるから，磁荷（モノポール）は存在できない．磁場は，アンペールの法則により電荷が動いて発生する，と電磁気学は教えている．

ベクターポテンシャル $\boldsymbol{A}$ に特異性を許せば，モノポールは導入可能である．z 軸の周りの回転角を φ とする．ベクター関数 $(\partial_x\varphi, \partial_y\varphi, 0)$ は z 軸上で特異性をもつ．特異性が z 軸の下半分（$z \leq 0$）にのみ存在するように，天頂角 θ を導入し

$$A_k^{\rm Dirac} = \frac{\mu_0}{4\pi}g(1-\cos\theta)\partial_k\varphi, \quad A_z = 0 \tag{5}$$

のようにポテンシャルを定義する．ここに，$k = x, y$ である．電場はゼロで，磁場は次のようになる．

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{g}{r^2}\frac{\boldsymbol{x}}{r}. \tag{6}$$

これは，μ_0 は透磁率とし，原点にある磁荷 g のモノポールが作る磁場である．

無限に長い**ディラック紐**（本誌，風間洋一氏の記事 2.3 節参照）に沿って磁束が存在しており，その端点にモノポールが発生している，と解釈するのが自然である．ベクターポテンシャルが特異なのは，磁束が太さゼロのディラック紐に沿ってのみ存在しているからである．このディラック紐の周りを電子が一回転すると，

$$\exp\left[{\rm i}\frac{e}{\hbar}\oint dx_k A_k^{\rm Dirac}\right] = \exp\left[{\rm i}\frac{e\mu_0 g}{\hbar}\right] \tag{7}$$

という位相因子を獲得する．位相が $2\pi\times$ 整数だと，電子には磁束の存在は探知できない，この量子力学的条件が磁荷 g の量子化条件

$$g = \frac{2\pi\hbar}{e\mu_0}n, \quad n = \pm1, \pm2, \cdots \tag{8}$$

を与える．このとき，端点に現れる磁気単極子のみが観測可能である．ポテンシャル (5) で記述される磁気単極子をディラック・モノポールという．

ディラック・モノポールは量子力学的対象としては問題がない．しかし，第二量子化するためには，それに付随したディラック紐も同時に生成する必要があり，場の量子論を構成するのは容易ではない．また，統一理論の観点から素粒子と見なすことはできない．現在，モノポールは非可換ゲージ理論の**位相的励起（トポロジカル・ソリトン）**として大統一理論において必然的に実現する，と考えられている．

3. 非可換ゲージ理論とヒッグス機構

最も単純な非可換群は $SU(2)$ である．$SU(2)$ は

電子のスピンに作用する変換としてお馴染みである．一般に2つの状態があり，量子力学的重ね合わせが存在するなら，自然に導入される．パウリ行列を σ_a として，$SU(2)$ 対称性の生成元 $\tau_a = \frac{1}{2}\sigma_a$ を定義する（$a = 1,2,3$）．生成元の数だけのポテンシャル A_k^1, A_k^2, A_k^3 を導入して（$k = x,y,z$），対称群 $SU(2)$ をゲージ化する．$SU(2)$ ゲージポテンシャル

$$\boldsymbol{A}_k = A_k^a \tau_a \equiv A_k^1\tau_1 + A_k^2\tau_2 + A_k^3\tau_3 \tag{9}$$

は非可換である．即ち，

$$[\boldsymbol{A}_j, \boldsymbol{A}_k] = A_j^a A_k^b [\tau_a, \tau_b] = \mathrm{i}\varepsilon_{abc} A_j^a A_k^b \tau_c. \tag{10}$$

ここに，ε_{ijk} は完全反対称テンソルである．ゲージポテンシャルからゲージ場を定義する．

$$\boldsymbol{F}_{ij} = \partial_i \boldsymbol{A}_j - \partial_j \boldsymbol{A}_i + \mathrm{i}\frac{e}{\hbar}[\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}_j]. \tag{11}$$

$SU(2)$ ゲージ変換

$$\boldsymbol{A}_i \to \boldsymbol{A}'_i \equiv S^{-1}\boldsymbol{A}_i S + S^{-1}\partial_i S \tag{12}$$

を行うと，ゲージ場は

$$\boldsymbol{F}_{ij} \to \boldsymbol{F}'_{ij} \equiv S^{-1}\boldsymbol{F}_{ij} S \tag{13}$$

のように変換する．

3種類のゲージポテンシャルを導入したので，このうちの2つに質量を与え，残りの1つを質量を持たない電磁場ポテンシャルと見なす．そのために生成元の数だけの随伴表現ヒッグス場 Φ_1, Φ_2, Φ_3 を導入し，$SU(2)$ ヒッグス場

$$\boldsymbol{\Phi} = \Phi_1\tau_1 + \Phi_2\tau_2 + \Phi_3\tau_3 \tag{14}$$

を定義する．$SU(2)$ ゲージ変換は，

$$\boldsymbol{\Phi} \to \boldsymbol{\Phi}' \equiv S^{-1}\boldsymbol{\Phi} S \tag{15}$$

である．ヒッグス場の共変微分を

$$D_k\boldsymbol{\Phi} = \partial_k\boldsymbol{\Phi} + \mathrm{i}\frac{e}{\hbar}[\boldsymbol{A}_k, \boldsymbol{\Phi}] \tag{16}$$

で定義すると，$D_k\boldsymbol{\Phi} \to S^{-1}(D_k\boldsymbol{\Phi})S$ のように，$SU(2)$ ゲージ変換で変換する．なお，式(14)よりヒッグス場は3次元空間の (Φ_1, Φ_2, Φ_3) というベクター場と見なせる．

下記のハミルトニアンは $SU(2)$ ゲージ変換(12)と(15)に対して不変である．

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\boldsymbol{F}_{ij}\boldsymbol{F}_{ij}] + \mathrm{Tr}[(D_k\boldsymbol{\Phi})^2] + \lambda^2\left(\mathrm{Tr}[\boldsymbol{\Phi}^2] - \frac{1}{2}v^2\right)^2. \tag{17}$$

ここに，トレースはパウリ行列に対するものである．最後の項をヒッグスポテンシャルというが，これを最小化する基底状態は $\mathrm{Tr}[\boldsymbol{\Phi}^2] = \frac{1}{2}v^2$ を満たす任意のヒッグス場 $\boldsymbol{\Phi}$ である（図2参照）．このような状態は縮退しており無数に存在し，物理的に同等であるが，基底状態として1つ選ぶ必要がある．最も単純な状態として，対角行列

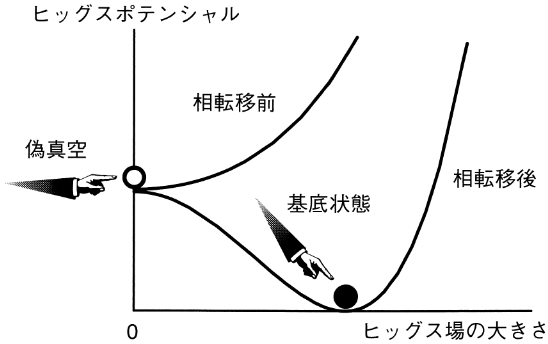


図2　ヒッグス場の大きさ $\mathrm{Tr}[\boldsymbol{\Phi}^2]$ に対する有効ポテンシャル．現在の基底状態は $\mathrm{Tr}[\boldsymbol{\Phi}^2] = \frac{1}{2}v^2$ を満たす点にいる．宇宙初期は，$\mathrm{Tr}[\boldsymbol{\Phi}^2] = 0$ を満たす点（偽真空）にいた．

$$\boldsymbol{\Phi} = v\tau_3 = v\,\mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \tag{18}$$

を選び，これを共変微分項に代入すると，

$$\mathrm{Tr}[(D_k\boldsymbol{\Phi})^2] = \frac{e^2v^2}{2\hbar^2}[(A_k^1)^2 + (A_k^2)^2] \tag{19}$$

となる．ゆえに，ゲージポテンシャル A_k^1 と A_k^2 は質量を獲得するが，A_k^3 は質量ゼロのままである．

基底状態を選んだので，$SU(2)$ 対称性は自発的に破れている．$SU(2)$ 対称性を破らない状態は，$\boldsymbol{\Phi} = 0$ だけである．これを偽真空という．

このゲージ（$\boldsymbol{\Phi} = v\tau_3$）では，電磁場ポテンシャルは A_k^3 であり，電磁的対称性 $U(1)_{\mathrm{em}}$ の生成元は，

$$Q_{\mathrm{em}} = \tau_3 = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \tag{20}$$

である．別の基底状態 $\boldsymbol{\Phi}'$ を選んだとき，$\boldsymbol{\Phi}'$ が $\boldsymbol{\Phi} = v\tau_3$ とゲージ変換(15)で結ばれているなら，この新しいゲージでは電磁的対称性の生成元は，$Q'_{\mathrm{em}} = S^{-1}\tau_3 S$ である．ゲージ不変な磁場は

$$B_i = \varepsilon_{ijk}\mathrm{Tr}[\boldsymbol{F}'_{jk}Q'_{\mathrm{em}}] = \varepsilon_{ijk}\mathrm{Tr}[\boldsymbol{F}_{jk}Q_{\mathrm{em}}] \tag{21}$$

で与えられる．

4. トフーフト・ポリヤコフのモノポール

上記の $SU(2)$ ゲージ理論を続けて考察する．基底

状態を $\boldsymbol{\Phi} = v\tau_3$ に選び，この系にディラック・モノポールを導入してみよう．ゲージポテンシャルは (5) で与えられる関数 A_k^{Dirac} を用いて

$$\boldsymbol{A}_k = A_k^{\mathrm{Dirac}}\tau_3 \tag{22}$$

である．次の $SU(2)$ 行列を考える．

$$S = \cos\frac{1}{2}\theta\begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}\varphi}\end{pmatrix} + \sin\frac{1}{2}\theta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}. \tag{23}$$

この行列を用いてゲージ変換 (12) と (15) を行うと，ヒッグス場とゲージポテンシャルは

$$\boldsymbol{\Phi}' = \frac{x_i}{r}\tau_i v, \tag{24}$$

$$\boldsymbol{A}_i' = \varepsilon_{ijk}\tau_j\frac{x_k}{r^2}\frac{\mu_0}{4\pi}g \tag{25}$$

となる．ここに，$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ である．また，電磁的対称性の生成元は

$$Q_{\mathrm{em}}' = S^{-1}\tau_3 S = \frac{x_i}{r}\tau_i \tag{26}$$

である．電磁場は (21) で定義されるが，

$$B_i = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{g}{r^2}\frac{x_i}{r} \tag{27}$$

となり，単にモノポール磁場 (6) を記述している．なお，ヒッグス場を含まない純粋な $SU(2)$ ゲージ理論で式 (25) の形のモノポールを提唱したのは，ウーとヤン[4] である．

変換後のゲージポテンシャルからディラック紐は消えている．しかし，ヒッグス場に特異性が発生している．ヒッグス場 (24) は原点からの長さ v の半径方向ベクトル (x, y, z) を表している．長さ v だから，確かに基底状態である．しかし，原点が問題である．原点ではヒッグス場が不定になる．

ヒッグス場は基底状態ではある方向を向いた長さ v のベクトルで表される．モノポールの中心では特定のどの方向も向けないのだから，許される唯一の可能性は対称性のある状態 $\boldsymbol{\Phi} = (0, 0, 0)$ が回復していることである．従って，(24) と (25) を用いて，モノポール状態として

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{mono}} = f(r)\frac{x_i}{r}\tau_i v, \tag{28}$$

$$\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{mono}} = h(r)\varepsilon_{ijk}\tau_j\frac{x_k}{r^2}\frac{\mu_0}{4\pi}g \tag{29}$$

という場の配位を考える．ここに，$f(r)$ と $h(r)$ は，$r\to\infty$ で $f(r) = 1$, $g(r) = 1$ を満たす動径 r の関数である．さらに，エネルギーが原点で発散しない条件を課す．特に，$f(0) = 0$ であり，確かに対称性が回復している．式 (28) と (29) をハミルトニアンに代入し，エネルギーを最小化して関数 $f(r)$ と $h(r)$ を決定することができる．質量を獲得したヒッグス粒子とゲージ粒子は原点の周りだけで励起し，モノポールのコアを作る．コアの中心では対称性が回復している．コアの外では，ほとんど，$f(r) = 1$, $g(r) = 1$ であり，ディラック・モノポールの磁場と完全に一致する．最小化したエネルギーがモノポールの質量を与える．式 (28) と (29) で記述される解をトフーフト・ポリヤコフ[5] のモノポールという．

このようにして得られたモノポールはトポロジカル・ソリトンである．基底状態を表すヒッグス場の向きはゲージ変換で自由に変えられる．しかし，ハリネズミの針のような配位をしたヒッグス場 (24) は滑らかに変形して一方向に揃えることはできない．読者は，この状態を揃った状態 $\boldsymbol{\Phi} = v\sigma_3$ からゲージ変換 (23) で求めたのではないか，と反論されるであろう．実は，(23) は特異ゲージ変換と呼ばれるもので，滑らかな変形を起こさない．この変換には z 軸の周りの回転角 φ が現れているが，これは z 軸上で定義されていない．この性質により，特異ゲージ変換は z 軸に沿ったディラック紐の生成消滅を行っているのである．

トポロジカル・ソリトンは運動方程式とは関係なく保存するトポロジカル荷電で特徴付けられる．これは，$\hat{\Phi}_a = \frac{\Phi_a}{|\Phi|}$ として，次式で与えられる．

$$Q = \frac{1}{8\pi}\int_{r\to\infty}[\varepsilon_{abc}\varepsilon_{ijk}\hat{\Phi}_a\partial_j\hat{\Phi}_b\partial_k\hat{\Phi}_c]d^2S_i. \tag{30}$$

ここに積分はモノポールを含む無限に大きな球をとり，その表面で面積分したものである．$SU(2)$ の随伴表現は3次元空間の回転群に等しく，ベクトル $(\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2, \hat{\Phi}_3)$ は単位球の表面上の点と同一視できる．上の積分は，モノポールを含む球の全表面を回ったとき，ヒッグス場が群空間の単位球表面を回る回数を表している．ヒッグス場の配位 (24) に対して，$Q = 1$ を得る．この値は，空間の無限遠点の値にのみ依り，モノポール近傍での場の配位を変形しても変わらない．トポロジカル荷電と言われる所以である．

5. 電弱統一理論

電磁場を $SU(2)$ ゲージ理論に埋め込めばトポロジカル・ソリトンとしてモノポールが存在することをみてきた．この宇宙ではどうなっているのであろうか．最も単純な統一理論はワインバーグとサラムの電弱統

一理論である．ただ，残念ながら，この理論にはモノポールが存在できない．

電弱統一理論では，電子（の左巻き成分）とニュートリノをレプトンの 2 つの状態と見なし，対称性 $SU(2)_{\mathrm{W}}$ が導入される．レプトン間の相互作用は，(9) によって導入される 3 つのゲージポテンシャルが担う．さらに，$U_{\mathrm{Y}}(1)$ ゲージポテンシャル B_k を導入する．次に，これらの線形結合を作り，

$$W_k^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_k^1 \mp \mathrm{i}A_k^2), \tag{31}$$

$$Z_k = A_k^3 \cos\theta_{\mathrm{W}} - B_k \sin\theta_{\mathrm{W}}, \tag{32}$$

$$A_k^{\mathrm{em}} = A_k^3 \sin\theta_{\mathrm{W}} + B_k \cos\theta_{\mathrm{W}} \tag{33}$$

で 2 つの W ボソン，Z ボソンと光子（電磁ポテンシャル）A_k^{em} を導入する．ヒッグス機構により，対称性 $SU(2)_{\mathrm{W}} \otimes U(1)_{\mathrm{Y}}$ を自発的に破り，W ボソンと Z ボソンに質量を与える．弱混合角 θ_{W} は $\sin^2\theta_{\mathrm{W}} = 0.23126$ で与えられる．

電弱統一理論で導入するのは 2 つの基本表現ヒッグス場である．これは複素数場であり，4 つの実成分を持つ．これに対応してヒッグス粒子も 4 つあるのだが，対称性が自発的に破れた結果，このうち 3 つは 2 つの W ボソンと Z ボソンに吸収されてしまい，W ボソンと Z ボソンは質量を得る．吸収されずに残った 1 つが CERN で見つかったヒッグス粒子である．

電磁場ポテンシャルは，$SU(2)_{\mathrm{W}}$ の一部（A_k^3）と $U_{\mathrm{Y}}(1)$ の線形結合場からなり，一つの $SU(2)$ に含まれていない．ゆえに，前記の方法で磁気モノポールを導入することはできない．

6. 大統一理論

核子の構成要素はクォークであり，これらがグルーオンと呼ばれるゲージ場と相互作用して堅く結びついている．3 種類のクォークが存在しているから，強い相互作用の対称性は $SU(3)_{\mathrm{C}}$ である．電弱相互作用と強い相互作用が統一されたスケールでは，クォークとレプトンに区別はなくなるので，基本粒子は 5 つの状態を取ることになる．従って，対称性として $SU(5)$ を採用するのが一番自然である．しかし，既に述べたように $SU(5)$ モデルは陽子崩壊に関する観測結果とは整合せず排除されている．$SU(5)$ 大統一理論に超対称性と呼ばれる要素を加えた超対称 $SU(5)$ 大統一理論では陽子の寿命は延びることになり，実験結果を説

明できる可能性がある．また，$SU(5)$ に次ぐモデルとして $SO(10)$ 大統一理論が考えられている．どのモデルでもモノポールの出現機構は同一なので，ここでは $SU(5)$ モデルを用いて説明する．

クォークの電荷は $\frac{1}{3}$，電子の電荷は -1 だから，電磁的対称性 $U(1)_{\mathrm{em}}$ の生成元は，対角成分が

$$Q_{\mathrm{em}} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1, 0\right) \tag{34}$$

であるような 5×5 行列である．$SU(5)$ の生成元の数（$5^2 - 1 = 24$）だけのポテンシャルを導入する．次に，同数の随伴表現ヒッグス場 $\boldsymbol{\Phi}$ を導入する．これは，$\mathrm{Tr}[\boldsymbol{\Phi}] = 0$ を満たす実数 5×5 行列で与えられる．基底状態のヒッグス場として

$$\boldsymbol{\Phi}_0 = v\,\mathrm{diag}\left(1, 1, 1, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \tag{35}$$

をとると，自発的対称性の破れ

$$SU(5) \to SU(3)_{\mathrm{C}} \otimes SU(2)_{\mathrm{W}} \otimes U(1)_{\mathrm{Y}} \tag{36}$$

が起きることが知られている．これを

$$\boldsymbol{\Phi}_0 = v\,\mathrm{diag}\left(1, 1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}\right) + \frac{5}{4} v\,\mathrm{diag}(0, 0, 1, -1, 0) \tag{37}$$

と書き直し，右辺第二項の 3 番目と 4 番目 $(1, -1)$ をパウリ行列 σ_3 の対角成分と見なす．この部分に $SU(2)$ の生成元 $\tau_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ を埋め込み，5×5 行列

$$T_i = \mathrm{diag}(0, 0, \tau_i, 0) \tag{38}$$

を導入する．

$SU(5)$ に $SU(2)$ を埋め込めば前に述べた機構でモノポールが生成される．最適なゲージは電磁対称性の生成元が

$$Q_{\mathrm{em}} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) + \frac{4}{3}\frac{x_i}{r} T_i \tag{39}$$

となるものである．モノポールを記述するヒッグス場とゲージポテンシャルは，(28) において τ_i の代わりに T_i を用いて

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{mono}} = \mathrm{diag}(f_1, f_1, f_2, f_2, -2f_1 - 2f_2) + f(r)\frac{x_i}{r} T_i, \tag{40}$$

および

$$\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{mono}} = h(r)\varepsilon_{ijk} T_j \frac{x_k}{r^2} \frac{\mu_0}{4\pi} g \tag{41}$$

となる．$f(r)$ は半径 r の関数である．境界条件は，$r \to \infty$ で基底状態のヒッグス場 $\boldsymbol{\Phi}_0$ に一致することである．また，ゲージ場に関しては，$h(r) \to 1$ である．$r \to 0$ に対しては，エネルギーが有限になるように選ぶ．エネルギーを最小にする配位がモノポールを与える．モノポールコア内では X ボソン，Y ボソンが励起している．コアの外では，磁場は (6) になっている．質量は $10^{16}\,\mathrm{GeV} \simeq 10^{-8}\,\mathrm{g}$ と推定できる．これは通常の素粒子と比べて桁違いに大きく，1 つのバクテリアほどの重さに匹敵する．従って，粒子加速器で作り出すことは絶対にできない．

モノポールの中心ではヒッグス場はゼロになっており，$SU(5)$ 対称性が回復している．そのため，クォークとレプトンに区別がなく，相互の変換が可能になる．この領域は X ボソンのコンプトン波長（10^{-29} cm）ほどであるが，モノポールを触媒とした陽子崩壊は強い相互作用と同程度の大きさで起こることが議論されている[3)]．これはルバコフ効果と呼ばれる．モノポールの実験的検出にはこの陽子崩壊を探求するのがよい．モノポールによる陽子崩壊観測は大統一理論の直接的証明といえる．

7. モノポール生成とインフレーション宇宙

最後に，宇宙におけるモノポールの発生機構を議論する．誕生直後の宇宙は偽真空状態にあった，と考えられる（図 2 参照）．宇宙は高温で，ヒッグス粒子は蒸発していた．温度が 10^{15} GeV まで下がったとき，相転移が起こり，ヒッグス場は真空（基底状態）に凝縮し，対称性は自発的に $SU(3)_{\mathrm{C}} \otimes SU(2)_{\mathrm{W}} \otimes U_{\mathrm{Y}}(1)$ に破れる（図 3 参照）．基底状態は無数に縮退しており，物理的にはすべて同等な状態である．基底状態はヒッグス場の方向で区別できる．宇宙のいたるところで相転移が起こるが，各点でヒッグス場のランダムな方向

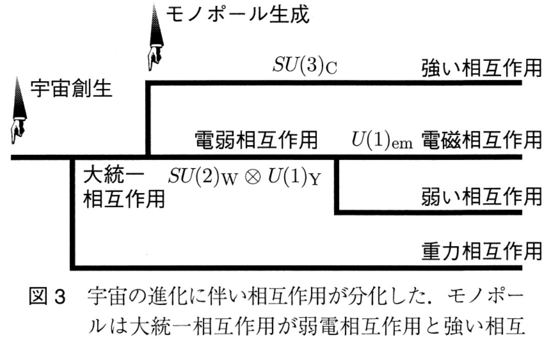


図 3　宇宙の進化に伴い相互作用が分化した．モノポールは大統一相互作用が弱電相互作用と強い相互作用に分かれたときに生成された．

に凝縮してゆく（図1参照）．このようなドメインが接触し重なると，ヒッグス場は滑らかに均されてゆくが，捻れが解消できない位相的欠陥が発生する．点状位相的欠陥に対するはヒッグス場の配位はモノポールの配位に他ならない．

相転移により生成されるモノポールの数密度の推定が可能である．まず，4個のドメインで囲まれた領域にモノポールを生成される確率は $\frac{1}{8}$ である[6)]．1つのドメインに許される最大の大きさは因果関係を持ち得る長さである．このような議論から得られるモノポールの数は少なくとも核子の数の $\frac{1}{100}$ 程度と見積もられる．これは現時点でモノポールの確実な実験的検出が存在しない事実と矛盾している．

この過剰生成問題に対する解決案として，宇宙のインフレーション模型は有望である．宇宙の大きさを表すスケールファクター R の時間変化は，G を重力定数として，フリードマン方程式

$$R^{-1}\frac{dR}{dt}=\left(\frac{8\pi G\rho}{3c^2}\right)^{1/2} \tag{42}$$

で記述される．ここに，ρ は宇宙のエネルギー密度で，相転移直後では，偽真空のエネルギー密度で与えられる定数である．この方程式の解は指数関数的に膨張する宇宙である．この結果，因果関係を持ち得る長さは指数関数的に増大し，モノポールの数密度は小さくなる．極端な模型では，現在の宇宙は1つのドメインに含まれており，その場合には，モノポールは1つも存在しないことになる．

モノポールは宇宙の相転移直後に誕生し，それ以降に新たに生成されることはない．モノポールの発見とその性質の観測は，正しい大統一理論を決めるばかりではなく，宇宙論モデルの検証にもなる．

参考文献

1) F. Englert and R. Brout, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 321; P.W. Higgs, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 508.
2) P. Dirac, *Proc. Roy. Soc. (London) A* **133** (1931) 60.
3) V.A. Rubakov, *Nucl. Phys. B* **203** (1982) 311; C.G. Callan Jr., *Phys. Rev. D* **25** (1982) 2141.
4) T.T. Wu and C.N. Yang, in *Properties of Matter Under Unusual Conditions*, edited by H. Mark and S. Fernbach (Interscience, New York, 1968).
5) G. t'Hooft, *Nucl. Phys. B* **79** (1974) 276; A. Polyakov, *JETP Lett.* **20** (1974) 194.
6) T.W.B. Kibble, *J. Phys. A* **9** (1976) 1387.

（えざわ・じゅんいち，理化学研究所，東北大学名誉教授）

素粒子モノポールの実験的な探索

中村　正吾

1. はじめに

未知の素粒子の探索ほど夢多き研究テーマは他にない．新しい素粒子の発見は素粒子物理学を新たなステージへと大きく前進させ，宇宙の理解を変えてしまうこともある．

磁気単極子（以下，モノポール）は，長きにわたって研究者を惹きつけ，また悩ませてきた未知の素粒子の一つである．その理論的な側面は他の稿で説明されるが，厳密な取扱いをせずとも基本的な電磁気現象を見ればモノポールの存在というものを信じたくなる．

電気と磁気には見事な対称性がある．電場が動けば磁場が作られ，磁場が動けば電場が作られる．その電場の源となる＋もしくは－の電荷を持った荷電粒子がこの世に存在するならば，同様に，磁場の源となるNもしくはSの磁荷を持った「荷磁」粒子，つまりモノポールも存在するのではないか？

1931年にDiracのモノポールに関する論文[1]が出て，電荷の最小単位（つまり素電荷）があることを自然に説明できることが示されてから，モノポールの本格的な探索が始まった．このモノポールは**Diracモノポール**と呼ばれるが，その質量については予言ができなかったため，既知の粒子と大きくは違わない質量を想定して探索が行われてきた．

1974年になって，素粒子の電弱強の3つの相互作用を統一する**大統一理論**によりモノポールが必然的に現れることが 't Hooft と Polyakov によって示され[2]，また，**ビッグバン宇宙**の創成時に**宇宙の相転移**の中で自然に生成されることまで示されると状況は一変した．

様々な理論モデル毎に，いろいろな質量のモノポールが固有の磁荷で現れることが具体的に予言できるようになった．このモノポールは**GUT**（Grand Unified Theories）**モノポール**と呼ばれているが，その最大の特徴は，モノポールが既知の粒子に比べて桁違いに重いことで，代表的なものは陽子の約 10^{16} 倍！も重い[*1]と見積もられたことである．このことから，モノポールは，正体不明の**宇宙暗黒物質**の候補の一つ[*2]としてリアリティを増した．

また，GUTモノポールは，大統一理論の，もう一つの重要な予言である核子崩壊を触媒作用により誘発することが示された．核子崩壊は判別しやすい顕著な現象であるため，探索はいっそう盛んになったのである．

筆者は，研究者として駆け出しの大学院時代からおよそ10年近くにわたってモノポール探索に携わった．その経験も含め，本稿ではこれまでに行われたモノポール探索実験について，なるべく簡単に紹介したい．

なお，最初に断っておくが，これまでに，モノポールの存在を確認したと結論付けられる実験は

---

*1)　ゾウリムシくらいの重さである．

*2)　超重量の粒子は，数密度が小さくても宇宙への質量の寄与は大きい．

ない．しかし，過去のいくつかの実験報告では，遂にモノポールの検出に成功したのではないかと世界が色めき立ったこともあった．そのことについても少し触れたい．最後に，私感を交えて今後の展望について述べたいと思う．

2. モノポールの物質中の振舞い

モノポールを探索するには，モノポールと物質との間に働く力と，それによって引き起こされる現象を推測することが，何よりも重要である．

2.1 磁気力と磁気的分極

モノポールは，N もしくは S の磁荷を持っている*3)ので，磁場中では静磁気力が働くだろう．磁性体中に存在すれば，モノポールは磁場 $\boldsymbol{H}$*4)を感じて磁荷に比例した力を受け，捕捉されていると考えられる．

また，磁性体でなくても，モノポールが接近した原子は磁場にさらされることで磁気的に分極して磁気双極子を形成し，その磁気双極子とモノポールとの相互作用があることも予想される．

2.2 誘導電場，励起，イオン化

モノポールが運動していれば，電磁誘導により誘導電場が発生し，そのために近傍の原子は電気的に分極して，励起やイオン化を引き起こすと考えられる．誘導電場は速度に応じて単調に大きくなり，光速に近い速さでは最小磁荷のモノポールでも，電荷 $(137/2)/e \sim 68.5e$ の重イオンに匹敵する大きな励起とイオン化が期待される．

この速度依存性は荷電粒子の場合と大きく異なるので，励起やイオン化の量と，速度もしくは飛程を共に測定することによって，磁荷を直接に測ることなく，磁荷や質量を推定することができる．

なお，モノポールがコイルの中を通り抜ける場合は，誘導電場により，磁荷に比例する大きさの電流が流れると予想される．

2.3 Rubakov 効果

1982年にCallanとRubakovは，代表的なGUTモノポールには大統一理論が予言する核子の崩壊を促進する触媒作用があることを予言した[3]．これは**Rubakov 効果**と呼ばれている（本特集の江澤潤一氏の記事6節参照）．核子の崩壊は発生するエネルギーが 1 GeV 近くと大きい現象のため探索の際の手掛かりに用いるには都合良いが，どの程度促進するかは予言が難しい．また，モノポールの種類によっては，この効果が全くないものもある．

3. 流束の天文学的制限

我々の住む銀河内には，10^{-10} T ほどの微弱な磁場が広がっていることが天文学的な観測により分かっている．もし銀河中にモノポールが存在すれば，モノポールが磁場によって加速されて磁場のエネルギーを奪い続け，磁場生成の速度を上回った場合には銀河の磁場が消滅してしまうであろう．実際には銀河に磁場があることから，モノポールの流束には，およそ $10^{-15}\,\mathrm{cm^{-2}s^{-1}sr^{-1}}$ 以下という上限が導かれており，**Parker 上限**[4]と呼ばれている*5)．この上限は厳しく，面積が 1,000 $\mathrm{m^2}$ の測定器でモノポール観測を行う場合，1 年間で 1 イベント程度以下の流束に相当する．

その他，宇宙暗黒物質の観測量から来る上限や，GUT モノポールについては天体における Rubakov 効果を考慮した流束の厳しい上限なども議論されている．これらの議論には，通常，多少とも仮定が入るため，直接的な探索の結果との比較は難しいが，直接実験の結果と並び重要な制限となっている．

4. 探索実験のいろいろ

モノポールの探索は，前節までで述べた考え方に基づいた様々な方法を用いて行われてきた．以下に，典型的な実験を紹介したい．

4.1 身の周りの物質中の探索

物質中のモノポールを検出するには，モノポールを含んでいそうな物質をコイルに通過させ，電磁誘導により発生する微弱な電流を検知する手法

*3) 磁荷とともに電荷も持つモノポールを考えることもできる．これはダイオンと呼ばれるが，ここでは省略する．

*4) 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ ではない．磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は湧き出しがなく捕捉は期待できない．

*5) 詳細な議論では，上限値は仮定するモノポールの質量と速度によって変化する．

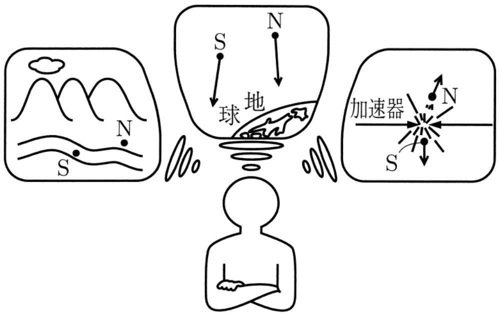


図 1　どうやって探すか？

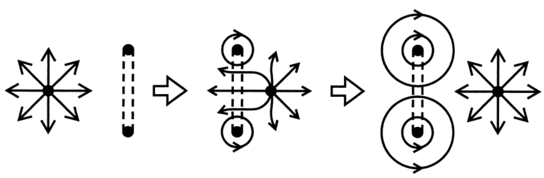


図 2　モノポールから出る磁力線は超伝導コイルを横切ることができないので，モノポールの通過後はリングに磁束が残り，永久電流が流れる[5)].

が代表的な方法である．コイルが超伝導状態であれば，磁力線が電線を通り抜けられずにコイルに巻き付き，すなわち永久電流が残る（図 2).

この方法のメリットは，磁荷による直接的な効果を利用するので原理に曖昧さのないことであるが，信号は小さいため，周囲からのノイズの高度な遮蔽に加えて，超伝導コイルと SQUID と呼ばれる超高感度な磁気センサなど，高度な低温技術が必須である．

また，この種の探索は，モノポールを多く含有していそうな物質として何を試料に選ぶかも重要である[*6)]．その来歴は定かでなくとも，物質中にモノポールが効率良く留まって（もしくは集まって）蓄積していることを期待し，海水，鉄鉱石，隕石や月の石など，多種多様な物質がサンプルに選ばれてきた．それらの探索結果の単純比較は困難だが，物質中の核子に対する割合で，およそ 10^{-29} 以下という厳しい上限値[6)] がこれまでに得られている[*7)].

*6)　金探しでは，金脈を含むことが多い岩石を探すだろう．

*7)　本邦では戎と渡辺が，約 15 t の鉄鉱石について，溶鉱炉の高温で鉱石から外れ落ちるモノポールを探索した[7)].

4.2 宇宙線中の流束の探索

頭上から絶え間なく降り注いでいる高エネルギーの宇宙線は，新粒子や新現象の宝庫で，モノポールについても探索が数多く行われてきた．

1980 年代以降は，モノポール探索は超重量の GUT モノポールに関心の中心が移り，それらは貫通力が高く物質には簡単に束縛されそうにないことから，宇宙線中の探索が増えたのである．さらに，正体不明の宇宙暗黒物質の存在を示す観測事実が積み重なりつつあり，その候補の一つにモノポールがなったことも後押しとなった．

宇宙線中の GUT モノポールは，どの方向からどれだけやってくるかはわからない．したがって，探索はなるべく広い面積で，有感な立体角がなるべく大きい検出器を用いたほうが，確率的にモノポールを捉えやすいであろう．そしてもちろん，なるべく長期間，観測を継続したい．

このうち，研究者の工夫の余地があるのは，検出器の面積 S と有感な立体角 Ω の積で，検出器自身の特性を表すこの量を**アクセプタンス**と呼び，

$$S\Omega = \int S d\Omega$$

で定義される．

このタイプの探索では，多種多様な型の検出器が用いられてきたが，ここでは紙面の都合から 2 つの例のみ紹介する．

4.2.1 例 1—超伝導コイルによる探索

検出原理が明確である探索として，物質中のモノポールを探索する場合と同様に，超伝導コイルを展開して通過させ，電磁誘導により発生する微弱な永久電流を観測しようとする探索が挙げられる．この方法は，宇宙線中に探す場合にはコイルの開口面積をなるべく大きくしたいが，ノイズ対策とコストの面で限界がある．

この種の探索では，1982 年に Cabrera らが面積 $20\,\mathrm{cm}^2$ のコイルで 151 日間探索し，バレンタインデーのモノポール候補のイベント（図 3）を報告した[8)]ことが知られている．しかし残念ながら，この後に規模を拡大して行われた探索では，同様の候補イベントを再び得ることはできなかった．

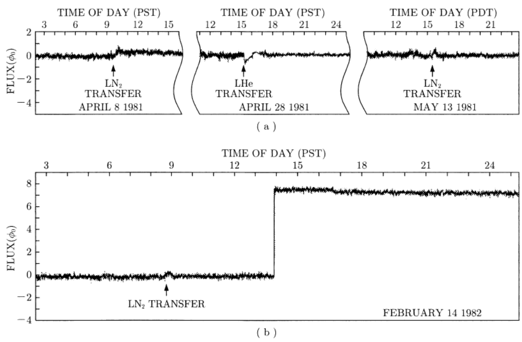


図 3 Cabrera らが 1982 年 2 月 14 日に得たモノポール候補のイベント (b). 縦軸は, 超伝導コイルに巻き付いた磁束の量で, 電流と比例する. 通常時は安定であった (a) と主張した. 参考文献 8) より引用.

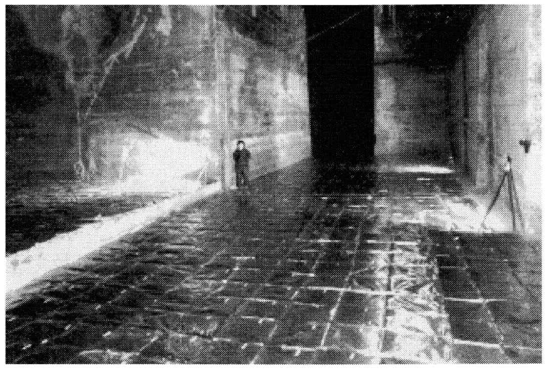


図 4 栃木県の大谷石採石場跡の地下におけるモノポール探索. CR-39 プラスチック板の 4 層は, 気密袋に入れて敷き詰められた. 奥に立つ作業者と比べて規模を感じてほしい.

この美しいイベントが何によるか今でも不明だが, 信号の形だけでは結論を性急に出せない例である.

4.2.2 例 2—大面積のプラスチックによる探索

より大規模な探索を現実的なコストで実現するには, 励起やイオン化の量を測るために荷電粒子の測定で一般的に使われている検出器を用いるしか方法はない. 具体的には, **比例計数管**, **シンチレータ**, **チェレンコフ検出器**など, 様々なタイプの検出器が用いられ, 1980 年代から 90 年代にかけて多くの実験がアクセプタンスの拡大を図りながら精力的に行われた. これらを本稿で細かに解説することは適わないので, ここでは, 筆者が自ら携わった, 高感度プラスチック飛跡検出器 CR-39 を, 地下において 2,000 m^2 を超える世界最大面積で用いて行なった探索実験を紹介して, 実験研究の別の一端をお伝えしたい.

筆者が大学院に進んだ 1980 年代前半は, 素粒子物理学では, 大統一理論の証拠を掴むべく, 重要な予言である陽子崩壊と共に, GUT モノポールの発見を目指して宇宙線中の探索が精力的に進められていた. GUT モノポールは, 銀河の暗黒物質の成分になっているとすれば, 銀河中の**ビリアル速度**である光速の 10^{-3} 程度の速度で飛び交っていると考えられていた. これは, 光速近い速度の既知の宇宙線粒子と比べて極端に低速で, 一方, 超重量ゆえに既知の粒子ではあり得ない極めて高い貫通力を持っていると予想されていた.

筆者が携わった最初のモノポール探索は, 通常の宇宙線が十分減衰する岐阜県の神岡鉱山内の地下 250 m で, 10 m^2 前後 × 多層のプラスチックシンチレータを設置して行なった一連の実験であった. その後, さらに面積規模を拡大するために, 荷電粒子の飛程（すなわち貫通力）を測ることのできる高感度プラスチック飛跡検出器 CR-39[*8)] の板[*9)] を 4 層に重ねて用い, 栃木県の大谷石採石場跡の地下約 40 m に大面積に展開して探索を行なった（図 4）.

CR-39 板における粒子検出の原理を図 5 に示す. 粒子が CR-39 板を通過すると, 損傷が半永久的に残る. その箇所は後から化学エッチングにより早く溶解し, 通過した軌道の方向に傾いた円錐型の凹みが表裏両面に生ずる.

CR-39 の感度 s は, 損傷部のエッチング速度 V_t と周囲のエッチング速度 V_b の比で定義され, 円錐の半頂角 θ とも次式のような関係がある.

$$s \equiv \frac{V_\mathrm{t}}{V_\mathrm{b}} = \frac{1}{\sin\theta}.$$

この s は, 入射粒子による軌道近傍のエネル

*8) 元は眼鏡レンズに用いられていたポリカーボネート系の固くて透明なプラスチックであるが, 後から放射線の重イオンに感度が高いことが見出されて粒子検出に用いられるようになった.

*9) 1 枚のサイズは 560 mm × 545 mm × 1.6 mm 厚であった.

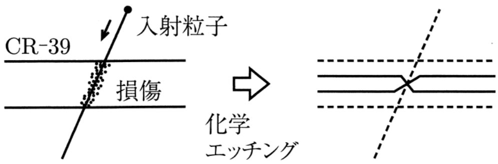


図 5　CR-39 プラスチックによる飛跡生成.

ギー付与*10) に従って単調に大きくなる関数で表される.

この実験は，速度は測れないが，CR-39 は電気を使用しない検出器で面積当たりのコストが低く抑えられた．もし，CR-39 を用いてモノポールの候補の信号が得られれば，次のステップとしてより多くの費用をかけて，速度も測れる実験を行なえば良い，と考えたのである.

結果として，2,000 m^2 × 4 層 × 2.1 年の探索の結果として，モノポールによるものとつじつまの合う飛跡は検出されず，モノポールの流束に対して，速度の関数として，$3.2 \times 10^{-16}\,\mathrm{cm^{-2}s^{-1}sr^{-1}}$ に達する厳しい上限を報告した[9]．これは，世界で初めて直接的に Parker 上限レベルを調べた探索となった.

余談であるが，この実験は様々な地味な作業を伴う苦労の多い実験であった．CR-39 は従来の写真フィルムのような用い方をするため，使用中の温度と湿度の管理が重要である．その点で，実験場所が地下の採石場跡であったことは既知の宇宙線粒子の遮蔽のみならず，低温で温度変化が一年を通して少なかった点で好都合であったが，2,000 m^2 を超える規模で行なう低温かつ薄暗い地下での作業は相当に厳しいものであった.

また，CR-39 の化学エッチングは，10 mol/L という高濃度の水酸化ナトリウム水溶液を 90℃ で用いる危険な化学処理で，大面積を現実的な時間内で処理するために，9 m^3 という大容量の専用化学処理槽を 2 台開発し神岡鉱山の精練所内に設置した.

その他にも，大量の CR-39 を扱うために，一様で高品質な CR-39 板の安定供給や，合理的に設置・回収するための作業，使用した CR-39 の校正実験，化学エッチング後の飛跡スキャン装置の開発研究と実際のスキャン作業など，様々な課題をこなすために多くの労力を要した.

ちなみに，この実験の後，イタリアの山岳地帯，グラン・サッソの地下実験所において，倍程度の規模で，CR-39 の他，シンチレータ等も加えたモノポール探索が行われ，2000 年代に入るまで続けられていたが，やはり，モノポールの信号は検出されなかった[10].

4.3 加速器による探索―作り出してみる―

素粒子物理学において「探索する」と言えば，人工的に作り出す方法も含まれる．モノポールの場合も一般の素粒子同様に，加速器を用いて高エネルギー粒子の衝突を起こせば，そのエネルギー集中の中に反モノポールと共に作られるかもしれない.

そこで，加速器でモノポールを探すべく，様々な高エネルギー加速器実験において，発生する粒子の飛跡の特徴の解析や，実験後の材料の分析が行なわれている．最近では，2012 年の Higgs 粒子の発見でも良く知られている CERN の LHC 加速器でも，ATLAS グループがモノポールの探索を行い結果を報告した[11].

5. これからの探索実験

将来のモノポール探索実験としては，まず間違いなく，世界最高エネルギーの加速器による生成実験は続けられるであろう．LHC 実験も 14 TeV へのエネルギーのアップグレードが予定されているので，そこでまたモノポールの探索が行われることは間違いない.

宇宙線中の流束の探索は，数 1,000 m^2× 数年という規模で Parker 上限を下回るレベルまで探索が行われたことから，とりあえず一服したという感があったが，最近になって，南極の 1 km^3 の氷河を用いたニュートリノ実験の IceCube において，モノポールの流束に対して，$10^{-18}\,\mathrm{cm^{-2}s^{-1}sr^{-1}}$ レベルのさらに厳しい上限が新たに得られつつある[12]．今後も，新たなアイデアに基づいて規模を

*10)　REL（Restricted Energy Loss）と呼ばれる.

拡大した実験が行われれば，モノポールの直接探索が続くことが期待される．

6. おわりに

素粒子モノポールは，あってもなくてもよいものではなく，現在の有望な大統一理論では超重量のモノポールが理論上はなくてはならないのである！ それが見つからないのは，宇宙初期に作られたものの，宇宙の進化の仕方（**インフレーション***11)）により希薄化してしまった，これが現在の解釈である．しかし，軽いモノポールが存在すれば，インフレーションを免れる場合があることも示唆されている．また，将来に何らかの新たな工夫により，人工的に作り得るかもしれない．

素粒子物理学は，素粒子に質量を与える **Higgs 粒子**の発見もあり，もはや相転移抜きでは語れない．しかし，その相転移の詳細はまだ明らかになっておらず今後の重要な課題である．素粒子の相転移を明らかにするには，同様に相転移によって生ずる GUT モノポールのような**ソリトン**を発見して調べることが重要であることは間違いない．ちなみに，インフレーション自身もまた，背後には宇宙の相転移があると考えられているのである．

そもそも，この宇宙において，全素粒子の質量スペクトルというものを考えた場合，それはどのようになっているだろう？ 最も軽いものは，光子のような質量 0 の粒子であるが，それ以外に，電子よりはるかに軽いが 0 でない質量をニュートリノが持つことが近年に明らかになっている．では，重いほうはどのような素粒子が存在しているのだろう？ 未知の超重量の粒子が，モノポールとして安定に存在しないだろうか？

美しい山間の町で探索実験を行っていたときの話である．ときおり地元の方が作業を珍しそうに見学に来られて研究の話を聞かれることがあった．そのたびに，山々の向こうにある壮大な宇宙と素粒子の研究の話を説明した．結果として研究をどれほど正確に伝えられたかは怪しいが，しかし，「研究の内容は難しくてワシらにはわからないが，ぜひ良い結果を出して下さい」と言われ，満足そうな顔をされたことが今でも忘れられない．

モノポール探索の醍醐味はここにもある．多くの人々の期待を背負って，人類の代表として，素粒子研究の歴史に新たな一行を書き加えるべく純粋な動機で自然の謎に挑戦できる．モノポールが発見されれば言うまでもなく，たとえ見つからなくとも，新たな厳しい制限が得られれば，その結果はかけがえのない事実であり，歴史に刻まれ次世代へと引き継がれてゆこう．

モノポールについて少しでも興味を持って貰えたならば，後掲の参考文献 14) を手掛かりにして，モノポールの世界を深く探求してほしい．読者の中から，将来のモノポール探索の新たな担い手となる方が現れることを心から願ってやまない．

*11) 最近，BICEP2 実験が宇宙のインフレーションの証拠を掴んだと報告した[13]．確定的なことはまだ先にならないと分からないが．

参考文献

1) P.A.M Dirac, *Proc. Roy. Soc. Lond. A***133**, 60 (1931).
2) G.'t Hooft, *Nucl. Phys. B***79**, 276 (1974); A.M. Polyakov, *JETP Lett.* **20**, 194 (1974), [*Pis'ma Zh, Eksp. Teor. Fiz.* **20**, 430 (1974)].
3) C.G. Callan, *Phys. Rev. D***26**, 2058 (1982); V.A. Rubakov, *Nucl. Phys. B***203**, 311 (1982).
4) E.N. Parker, *Astrophys. J.* **160**, 383 (1970).
5) J. Preskill, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **34**, 461 (1984).
6) J.M. Kovalik and J.L. Kirschvink, *Phys. Rev. A* **33**, 1183 (1986); H. Jeon and M.J. Longo, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1443 (1995) [Erratum-ibid. **76**, 159 (1996)].
7) T. Ebisu and T. Watanabe, *Phys. Rev. D* **36**, 3359 (1987).
8) B. Cabrera, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1378 (1982).
9) S. Orito *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1951 (1991).
10) M. Ambrosio *et al.*, *Eur. Phys. J.C***25**, 511 (2002).
11) G. Aad *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 261803 (2012)
12) R. Abbasi *et al.*, *Phys. Rev. D* **87**, 022001 (2013); M.G. Aartsen *et al.*, arXiv:1402.3460 [astro-ph. CO].
13) P.A.R. Ade *et al.*, arXiv: 1403.3985 [astro-ph.CO].
14) J. Beringer *et al.*, (Particle Data Group), *Phys. Rev. D***86**, 010001 (2012) and 2013 update for the 2014 edition (URL: http://pdg.lbl.gov).

（なかむら・しょうご，横浜国立大学大学院工学研究院）

強磁性金属中の有効電磁場とモノポール



多 々 良 源

1. 電磁気学

現代社会に欠かせない科学技術の多くが電磁気現象を使ったものである．携帯電話の通話やテレビの受信は機器の間を電磁波が光速で伝わることで実現されており，光ファイバーによる通信も電磁波の一種である光の伝搬を制御することでおこなわれている．また，コンピュータなどの情報機器は高度なエレクトロニクス技術の結晶であるが，エレクトロニクスの基本となっている抵抗素子，コンデンサ，コイルなどの部品も物質のもつ電磁特性を利用したものである．さらに，情報を多数の小さな磁石の上に記録することで蓄積するハードディスクでも，電流をコイルに流した結果生じる磁場を使って情報書き込みを行なっている．このように，あきらかに電磁気学がなければ現代社会は成り立ち得ない．電磁気がここまで有用であることはその機能のためであることはいうまでもないが，その多岐にわたる現象が4つの単純な微分方程式で記述されていることも大きく貢献していると思われる．これらの方程式はMaxwellの方程式とよばれ，電場と磁場のそれぞれに対する湧き出しと渦の大きさについての条件を規定するものである．そのうちの一つが磁場には湧き出しがないという条件で，これが本特集号のテーマである**磁気モノポール**の非存在を保証しているものである*1)．実際，磁場がどこかから湧き出すことがあればその場所には磁石のN極またはS極のみ（単極子）が存在することになるが，湧き出しなしの条件はこれを禁止していることになる．実際の磁石ではN極とS極は磁石の両端にあり離れているからそれぞれの場所には磁場の湧き出しと吸い込みがあるように見えるが，これは磁石では原子のもつ磁石が隙間なく並んでいるために途中にある極はNとSで打ち消してしまって通常は見えないためである．実際，磁石を分割してみると実は分割面にも磁極が存在していることがわかり，分割した小磁石のすべてがN極S極をもった普通の磁石になることは小学生の頃試してみた方もおられよう．もちろん，湧き出しなしの条件，別の言い方をすればモノポールが存在しないこと，を確かめるためには磁石を究極まで分割してみないといけない．実は最小の磁石は大きさをもたないことが量子力学により知られている．実際，物質を構成する素粒子である電子，陽子，中性子は**スピン**とよばれる微小磁石をもっているが，この磁石は普通の磁石とは異なり波動性を顕著にもち，量子力学に支配されている．この究極の磁石は大きさをもたないことが自然に要求されておりそれ以上分割することはできない*2)．こうして，量子力学の世界の最小の磁石，スピンは点粒子的存在であるため，分割によりモノポールを取り出すことはできないという仕掛けになっている．

さて，電磁気のもつ数学的構造は，自然現象の他の例と同様，自然界のもつ対称性が起源である．自然法則に何かの対称性があるということは，何かの「電荷」が存在しそれが保存されていることを意味していることが知られている．もちろん電磁気のもつ対称性が関係する電荷は通常我々に馴染みの深い電荷である．電荷の保存則がなぜ4つの微分方程式を生み出すのかを式を使わずに説明するのは難しいので，ここではその

*1) 正確には我々の感知できる「低エネルギー」ではということである．宇宙初期のような超高エネルギー状態では話が異なる．なお，電磁気の歴史に関しては文献 1) が詳しい．

*2) 実は陽子などの素粒子もクォークという部品からできており，さらに突き詰めればひもの運動が粒子の本当の姿であるという理論が有力であるらしいが，クォークを取り出すことは人間が実現できるエネルギーでは不可能で，さらにひもの大きさは原子より25桁ほど小さいものであり直接の観測は不可能であるため，本稿ではそうした実現不可能な可能性は考えない．

事実は受け入れていただくことにする．重要なことは，電磁気がもつ数学的構造は宇宙ができて電荷が生まれたときに決められたもので，これはビッグバンの直後，10^{-10} 秒後頃であるとされている．モノポールが通常の電磁気学には存在しないこともこのとき以来の自然界の掟となり，現在我々が実験室でモノポールを作ることはできない．

2. 物質中の電磁気学

さて，以上が小学校から大学教養課程までにおいて学ぶ電磁気学である．多くの方々は電磁気といえばこの，通常の電荷の電磁気しかないと思っておられると思う．実際，真空中の素粒子の現象では電荷の電磁気学は唯一の電磁気である．しかし，原理的には自然界には他にもいくつかの電磁気学が存在していて構わない．さきほど電磁気学の数学的構造は電荷の保存からきていると述べたが，数学用語ではこれは $U(1)$ ゲージ対称性というものの帰結である．$U(1)$ ゲージ対称性は実はめずらしい対称性ではない．この対称性さえあれば対応する「電荷」が存在し，それに関わる「電磁気学」が存在するのである．通常の電荷と電磁場ではないこうしたものを専門用語では有効電荷，**有効電磁場**とよぶ．素粒子物理学と異なり，物質内ではこのような有効電磁場が存在する例が少なからず知られている．物質内の有効電磁場はその現れるエネルギースケールが人間が関与できる程度に小さいため，この電磁場がモノポールを含んでいても何ら問題は生じず，実験室でモノポールを作ることも可能である*3)．

本稿では，こうした物質中の有効電磁場の最もよく知られた例として，強磁性金属中のそれを紹介する．

3. 強磁性金属

強磁性金属（金属磁石）は，磁石のうち電気を通すもののことである．最も単純には鉄を磁化したものがそれにあたる．これが磁石であるためには，さきほどふれたように構成する原子が微小磁石であるスピンをもち，さらにそのスピンが打ち消すことがないような構造を持っていることが必要である．たいていの金属磁石の場合，原子のもつ d 軌道に入っている電子（d 電子）がスピンをもつ．このスピンは良い近似として局在したものと考えることができるので**局在スピン**とよばれる．通常**磁化**とよばれるものはこの局在スピンがつくる磁気モーメント密度のことである．一方，今考えている系は金属であるので自由に動ける電子（**伝導電子**）が存在しており，これは通常 s 軌道の電子（s 電子）が担っている．つまり磁石の性質（磁性）と電気特性は違った軌道にいる電子が担っているとみなしてよい．もし両者が相互作用していなければ金属磁石も絶縁体磁石と同じ挙動をするが，現実には両者の相互作用により金属磁石には特有の性質が現れる．以下このことを見ていこう．

4. 局在スピンから伝導電子が受ける位相

s 電子と d 電子のスピンの間には，2つの軌道の間を電子が飛び移ることで生じる ***sd* 交換相互作用**とよばれる相互作用がはたらいており，これは両方のスピンを互いに平行（系によっては反平行のこともある）に揃えようとしている．この相互作用は強いもので，このため通常は伝導電子のスピンは局在スピンと同じ方向を向いている．ただ，伝導電子スピンの方向が強制的に決められているといっても，もしも磁石の磁化（局在スピンのつくる構造）が空間的に一様であるならば伝導電子は特に変わった挙動を示すことはない．というのも，一様な磁化は一様磁場を外からかけたのと同じであり，磁化により特筆すべき散乱が生じるわけではないからである．しかし磁化が空間的に変化している場合には，電子が運動すると非自明な効果が現れ得る．なぜなら，電子が空間中を運動する際に，場所ごとに背景にある磁化の向きに電子スピンは揃えられるため，電子は自分が運動している空間が曲がっているように感じるからである．空間の曲がりは一般的に**ゲージ場**という場で表され，これが存在することは何らかの有効電磁場の存在を意味している．つまり電子スピンに結合する有効電磁場が生じることになる．このことを式で議論してみよう．

電子がある地点から別の地点まで運動した際に，背

*3) 本稿でいう物質中の電磁気学は有効電荷に対する有効電磁気学であり，大学教養課程の教科書で述べられている物質中の電磁気学とは異なるものである．後者はもちろん通常の電荷に対する電磁気であり，物質中といえどもモノポールは許されない．話はそれるが，実は通常の電荷の電磁気学に対しても，教科書で述べられているような $\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}$, $\mu\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}$ という単純な関係が破綻するような例は物質中ではよく知られており，最近の研究のトピックの一つとなっている．例えば相対論効果（スピン軌道相互作用）を考慮すると電場 $\boldsymbol{E}$ から磁化 $\boldsymbol{M}$ が生成され得る．つまり電圧をかけると磁石になる物質があるのである．

景の磁化の向きが変化していると電子のスピンの波動関数には**位相**因子がつくことが知られている[2]．この位相 φ は電子の運動した経路 C に依存して決まるので，この経路に沿った線積分で $\varphi=\int_C \boldsymbol{dr}\cdot\boldsymbol{A}_\mathrm{s}$ と表すことができる．ここで $\boldsymbol{A}_\mathrm{s}$ は位相因子から決まるベクトルで背景の磁化の向きの関数である．経路に依存した位相がつくということは，一般的に何らかの**有効磁場**が存在していることをも意味している．実際，閉じた経路 C の場合を考えその上での線積分を Stokes の定理を用いて書き換えると $\varphi=\int_S \boldsymbol{dS}\cdot\boldsymbol{B}_\mathrm{s}$ と表すことができ，位相因子を経路 C が囲む面 S を通るベクトルの総量として表すことができるからである．ここで $\boldsymbol{B}_\mathrm{s}$ は $\boldsymbol{B}_\mathrm{s}\equiv\nabla\times\boldsymbol{A}_\mathrm{s}$ と定義される．磁場の面積分が電荷に位相を与えることはよく知られているので，$\boldsymbol{B}_\mathrm{s}$ は有効磁場として解釈できる．また，もし位相が時間変化すれば，それは $\dot{\varphi}=-V$ にしたがって起電力（電圧）V と等価であることも電磁気学で知られているので，$\dot{\varphi}=-\int_C \boldsymbol{dr}\cdot\boldsymbol{E}_\mathrm{s}$ で定義される**有効電場** $\boldsymbol{E}_\mathrm{s}$ が生じることになる．つまり $\boldsymbol{E}_\mathrm{s}=-\dot{\boldsymbol{A}}_\mathrm{s}$ である*4)．今考えている位相は背景の磁化が作るものであるから，有効電場は磁化が時間変化すると発生することになる．このように電子スピンに対する位相から定義された有効場 $\boldsymbol{E}_\mathrm{s}$ と $\boldsymbol{B}_\mathrm{s}$ は，すぐに確かめられるように $\nabla\times\boldsymbol{E}_\mathrm{s}+\dot{\boldsymbol{B}}_\mathrm{s}=0$ という関係をみたしている．これは Faraday の**誘導起電力**の法則そのものである．つまり，位相から生じる有効電磁場は自動的に誘導起電力の法則にしたがうのである．

5. 有効電磁場

さて，こうしてスピンに付随する**ベクトルポテンシャル** $\boldsymbol{A}_\mathrm{s}$ およびそれに付随する有効電磁場が存在することがわかったが，ここで量子力学を使って有効電磁場を具体的に求めてみよう*5)．電子がもっているスピン $\frac{1}{2}$ が局在スピンの方向 $\boldsymbol{n}$ に向けられているとき，スピン部分の波動関数は $\boldsymbol{n}$ の極座標 θ,ϕ で表すと，$|\theta\phi\rangle=\cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle$ となる．電子の運動によって異なった磁化の向き $\boldsymbol{n}'$（極座標を θ',ϕ' とする）の場所に移ったときに生じる電子の波動関数の重なりは $\langle\theta'\phi'|\theta\phi\rangle$ となる．この重なりを，2 地点の位置の差 $\boldsymbol{dr}$ が小さく $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{n}'$ の向きの差が小さいときに求めてやると $\langle\theta'\phi'|\theta\phi\rangle\simeq\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{dr}\cdot\boldsymbol{A}_\mathrm{s}}$ となることが示せる．ここで $A_{\mathrm{s},\mu}=\frac{\hbar}{2e}(1-\cos\theta)\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}$ である（$\mu=x,y,z,t$）．つまり，電子の運動によりスピン部分に $\varphi=\frac{e}{\hbar}\int\boldsymbol{dr}\cdot\boldsymbol{A}_\mathrm{s}$ で与えられる位相がつき，それによってベクトルポテンシャルが出現することがわかった．

ベクトルポテンシャルがあればそこから電場と磁場は通常の電磁気と同じく $\boldsymbol{E}_\mathrm{s}=-\nabla A_{\mathrm{s},0}-\partial_t\boldsymbol{A}_\mathrm{s}$ および $\boldsymbol{B}_\mathrm{s}=\nabla\times\boldsymbol{A}_\mathrm{s}$ と定義される．微分を実行してみるとこれらの i 成分は（$i=x,y,z$）

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{s},i}=-\frac{\hbar}{2e}\boldsymbol{n}\cdot(\dot{\boldsymbol{n}}\times\nabla_i\boldsymbol{n}),$$
$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{s},i}=\frac{\hbar}{4e}\sum_{jk}\epsilon_{ijk}\boldsymbol{n}\cdot(\nabla_j\boldsymbol{n}\times\nabla_k\boldsymbol{n}) \qquad (1)$$

となっていることがわかる*6)．$\boldsymbol{B}_\mathrm{s}$ のベクトル積からなる形から，スピンの配置が立体角をもつような構造であるときに $\boldsymbol{B}_\mathrm{s}$ が発生することがわかる．$\boldsymbol{B}_\mathrm{s}$ は通常**スピン Berry 位相**[3]とよばれる量である．

6. 有効電磁場の Maxwell 方程式

これらの場は定義より $\nabla\cdot\boldsymbol{B}_\mathrm{s}=0$ および $\nabla\times\boldsymbol{E}_\mathrm{s}+\dot{\boldsymbol{B}}_\mathrm{s}=0$ をみたしていそうであるが，これを具体的に確認してみよう．磁場の湧き出し $\nabla\cdot\boldsymbol{B}_\mathrm{s}$ は**モノポール密度**の意味をもつので，$\nabla\cdot\boldsymbol{B}_\mathrm{s}=\frac{\hbar}{4e}\sum_{ijk}\epsilon_{ijk}\nabla_i\boldsymbol{n}\cdot(\nabla_j\boldsymbol{n}\times\nabla_k\boldsymbol{n})\equiv\frac{\hbar}{8\pi e}\rho_\mathrm{m}$ とモノポール密度 ρ_m を定義しよう．この量は $\nabla_i\boldsymbol{n}$, $\nabla_j\boldsymbol{n}$ と $\nabla_k\boldsymbol{n}$ が作る立体角に比例しているが，$\boldsymbol{n}$ は単位ベクトルであり 2 つの独立変数 (θ,ϕ) のみにより記述されているため，これら 3 つの微分のベクトルは必ずある平面上にあり，立体角は 0 となる．つまりモノポール密度は局所的値としては必ず 0 である．同様に**モノポール流密度**，$\boldsymbol{j}_\mathrm{m}\equiv\nabla\times\boldsymbol{E}_\mathrm{s}+\dot{\boldsymbol{B}}_\mathrm{s}=\frac{3\hbar}{4e}\sum_{jk}\epsilon_{ijk}\dot{\boldsymbol{n}}\cdot(\nabla_j\boldsymbol{n}\times\nabla_k\boldsymbol{n})$ も同じ意味で 0 である．つまりこの有効電磁場は Maxwell の方程式の 2 つ

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}_\mathrm{s}=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{E}_\mathrm{s}+\dot{\boldsymbol{B}}_\mathrm{s}=0, \qquad (2)$$

をみたしており，モノポールは存在しないようにみえる．ここまでの議論は磁化構造 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r},t)$ が特異性を持たない限り正しい．しかし自然は時には並の人間の常識を超えた面白い現象を許すことがある．このことは少しあとで考えることにして，Maxwell 方程式の残りの 2 つがどうなっているかを考えよう．

磁化構造との相互作用により，一般的には伝導電子のスピン密度やスピンの流れも誘起される．これらを ρ_s, $\boldsymbol{j}_\mathrm{s}$ と表すと，これらと有効電磁場は

*4) $\boldsymbol{A}_\mathrm{s}$ の時間成分を 0 とするゲージをとった．
*5) 大学 3 年生は演習問題としてやってみてほしい．
*6) 通常の電磁場と同じ単位をもつように係数 $\frac{\hbar}{e}$ をつけた．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{s}} = \rho_{\mathrm{s}}, \quad \nabla \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{s}} + \dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}, \tag{3}$$

をみたしていることを示すことができる[4)]．つまり今の有効電磁場は**Maxwell 方程式**を完全にみたすのである．個人的な体験となるがこのことを当時研究室に所属する大学院生が見つけたときには驚いたものだった．なぜなら，物質中で磁化と伝導電子からなる系で発生するスピン偏極した電流とスピン密度を忠実に計算することで，有効電磁気の基本法則 4 つを導出できてしまったからである．つまり物質中の電子の挙動をきちんと理解していれば電磁気は改めて習う必要がない！[*7)] もちろん，このことはたまたまではなく，また実は物理として何ら不思議なことでもない．というのも，今考えている状況では有効電荷に対応する電子スピンは保存量であり，有効電荷の保存は $U(1)$ ゲージ不変性と等価であるため，電子スピンの保存則を破らない正しい計算をしていれば何らかの電磁気と同等の構造が出てくることは当然のことなのである．とはいえ，物質の輸送特性を計算することで電磁気の法則が導出できるということは，実に興味深いことではないだろうか．

7. 有効電磁場のモノポール

さて，たった今有効電磁場はモノポールをもたないといったばかりであるが，実は，磁化構造が**特異性**を持った場合にはモノポールが存在しても構わない．このことを確かめるために，モノポール密度を大きな体積 V の内部で体積積分した量 $I = \int_V d^3 r \rho_{\mathrm{m}}$ を考えてみよう．I は V の内部にあるモノポールの総量である．Gauss の定理を用いれば体積積分は V の表面 ∂V の上での積分になり，$I = \frac{e}{h} \int_{\partial V} d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{B}_{\mathrm{s}}$ となる．この式はまさに V から外に流れ出る磁束の総量がモノポールの数を決めていることをいっている．この，空間上の面積分は変数変換することで局在スピンの向き θ, ϕ についての積分で表すことができ，結果的に $I = \frac{1}{4\pi} \int_S \sin\theta d\theta d\phi$ と表すことができる．ここで S は V の表面上を変数 $\boldsymbol{r}$ が動いたときにベクトル $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ が掃引する面である．$\sin\theta d\theta d\phi$ は球面上の面積要素を動経の長さの 2 乗で割った量，つまり立体角であるから，面積分 I は球面のはる立体角を 4π で割ったものになっている．注意しなければならないのは，カウントすべきこの立体角は V の全表面上を動いたときにベクトル $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ が掃引する面積であるから，I は整数になることである．数学的には，I は 3 次元空間の無限遠点（$\boldsymbol{r}$）がつくる球面を考えたときに，その点での磁化の向き $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ が球面を何回巻くのかを表す量（**巻き数**）になっており，したがって値は整数である．つまり今考えている問題では空間中に整数個のモノポールが存在してもよい[*8)]．さて，モノポールを許す数学的事実と，一方で実際に計算してみてモノポール密度が 0 であったことはどう両立するのであろうか．つまり局所的にみてみるとモノポールはどこにも存在しないようにみえるが，空間全体でみるとたしかに存在する，という摩訶不思議なことがおきていることになる．このようなことは，実は場を表す関数が特異性をもっていることを示している．別の言い方をすればモノポールは幾何学的な存在である．モノポールが存在しない $\boldsymbol{n}$ の構造と，存在する場合を図 1 に示した．$\boldsymbol{n}$ がぐるっと球面全体をおおうような状況でモノポール数が 1 になっているが，たとえ $\boldsymbol{n}$ が空間で変化していても中途半端な変化である場合（ぐるっとおおわない），積分値として I は完全にキャンセルして 0 になっている．またモノポールがある場合，空間のどこかの点に必ず特異性が現れている．例えば，図 1 中央のような構造で球対称な場合，原点ではスピンの向きに特異性が出てしまう．

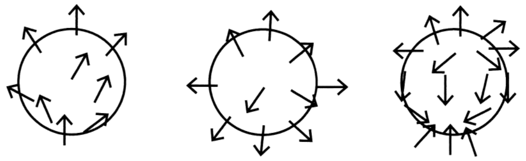


図 1　左から，モノポール数（巻き数）I が 0,1,2 のスピン構造の例．3 次元空間の無限遠点でのスピンの構造を示している．

8. 有効電磁場の使い道

こうして，金属強磁性体の電子にはそのスピンに結合する有効電磁場があることがわかった．これを**スピン電磁場**とよぶことにしよう．これは $U(1)$ ゲージ対称性がこの系に存在していることの現れで，物質中にも多種ある物理として美しい構造の存在の 1 つを示し

*7)　もちろん，量子場の理論で物質特性を計算するほうが，電磁気学よりもずっと「高度な」枠組みと思われているので，普通は電磁気学のほうを先に習うことになっている．

*8)　もちろん，負の数のモノポールが存在するときは，モノポールのもつ磁荷が負であるわけである．

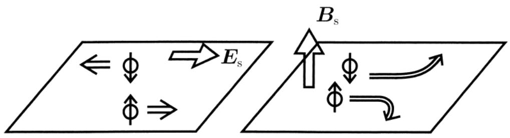


図 2　スピン電場 $\boldsymbol{E}_s$ とスピン磁場 $\boldsymbol{B}_s$ は電子をそのスピンの向きに依存して駆動する．

ている*9)．ではこの有効電磁場はどのようにしたら観測できるであろうか．あるいはもっと突き詰めて，通常の電磁場のようにデバイスとして役立つ可能性はあるであろうか？ まずスピン電場 $\boldsymbol{E}_s$ のほうは，伝導電子をそのスピンの向きに応じて別の向きに駆動するので，スピンの流れ（**スピン流**）を駆動する．つまり，電子をスピンごとに選別するという通常の電場ではできない操作が可能となる（図 2）．同様にスピン磁場 $\boldsymbol{B}_s$ は，電子のスピンの向きに応じた Lorentz 力を生み出す．このことを用いれば通常の磁場を物質にかけた際に電場で駆動した電流が曲がるという Hall 効果を，スピンごとに起こすことができ（スピン Hall 効果），やはりスピンの選別が可能となる．スピンごとの駆動，つまりスピン流が自由に使えるようになれば，磁気記録デバイスの飛躍的な機能向上や大容量不揮発メモリの実現につながることが期待されている．例えば，現在大容量記録装置のほとんどはハードディスクであるが，この中では処理された電気信号を，ディスク上で微小な磁石の向きに変換することで膨大な情報が保存されている．電気信号を磁石に書き込むためには一度磁場をつくってそれで磁石の向きを操作することで実現できる．このメカニズムは 19 世紀の古典電磁気学の成果を用いているが，現代のナノメートルサイズの微小磁石の集合体に対してもいまだに用いられているのである．ただし，この変換のためには磁気ヘッドというコイルや磁場を電気信号に変換する磁気抵抗効果（TMR）素子などからなる装置をディスク面に近づけて読み書きをする必要がある．このことは記録装置の小型化やヘッドの駆動にかかる時間が読み書きの高速化において大きな障害となっている．しかしスピン流を流すことができるなら磁石に単純にスピン流を流すだけで磁石への情報書き込みはできるし，また電流のもつスピン偏極を検出することができれば，磁石のもつ情報を導線 1 つで読み取ることができるようになる．つまり情報記録装置は大幅な集積化と高速化ができると同時に，省電力なども実現しやすくなるであろう．こうした技術はスピントロニクスとよばれて盛んに研究がされている[5,6]．ただし，スピン電磁場をスピン流や電流制御に用いるための原理的な課題として，これは磁化から生じる有効電磁場であるため，変化させるためには磁化構造を別に磁場や電流を加えて制御する必要がある点がある．

現状では，スピン電磁場の存在は，磁化構造の運動に伴う起電力や，磁化構造の立体構造のもとでの「異常な」異常 Hall 効果として確認されている．スピン磁場のほうは磁化構造の空間的な立体角に比例して出現し，スピン電場は時間と空間の 2 つの方向に対しての立体角によって発生する．典型的にはスピン磁場はフラストレートした強磁性体でスピン構造が立体的になっている系で現れることが期待され，実際に様々な系でスピン構造の変化と共に現れる異常 Hall 効果の異常な成分として実験で観測されている[7]．また，磁化構造が運動する際に時空でのカイラリティをつくる場合にはスピン電場が発生するが，これは (1) 式からわかるように磁化構造のもつ速さに比例する．例えば磁壁とよばれる磁化が回転している磁化構造が，らせんのように面を回転しながら並進運動する場合のスピン電場も測定されている．ただしこれまでのところ値としては nV 程度と大きなものではない．最近では skyrmion とよばれる幾何学的磁化構造をつくることができ，この構造から生じる異常 Hall 効果と，また構造が動いたときの起電力の両方が観測されており[8]，やはりスピン電磁場の存在が確かめられている．

9. スピン軌道相互作用のある場合

ここまで，強い *sd* 相互作用を念頭に話を進めた．このときに現れたモノポールは素粒子物理学で知られている 't Hooft–Polyakov モノポールと基本的に同様の構造である．実際，両者とも非可換ゲージ場がその一部の空間に制限されることで有効的な $U(1)$ ゲージ場が現れ，もとの非可換代数の痕跡がモノポールとして見えている．違いはゲージ群が強磁性体の場合は $SU(2)$ であり，素粒子のほうは大きな群であること，また $U(1)$ 自由度への拘束は強磁性体の場合は背景の磁化が引き起こすが，'t Hooft–Polyakov モノポールでは Higgs 場がそのはたらきをしており，このために 't Hooft–Polyakov モノポールには原点にも特異性が

*9)　もちろん $U(1)$ ゲージ対称性は近似的なもので，*sd* 交換相互作用によるスピン分極が完全でない場合には補正が生じる．この事実は電荷の電磁場の場合も同じで，ゲージ対称性は低エネルギー極限でのみ存在しているものである．

ないことも重要な差異である．

さて，現実の強磁性体では sd 相互作用は有限の強さで，また電子スピンを撹乱する相互作用も存在するため，上で述べた理想的な状況からはずれてしまう．しかし，実は sd 相互作用が弱い領域でも，有効電磁場が存在することが知られている[4]．これは，たとえ弱くても $SU(2)$ 空間の対称性が破れ有効 $U(1)$ ゲージ場が定義できるからである．興味深いのはスピンを乱すスピン緩和の効果である．これには不純物スピンによる散乱や**スピン軌道相互作用**を起源とするものがあるが，いずれの場合もスピンを撹乱することで有効電磁場が定義できなくなるように思われる．しかしこれまで知られているスピン軌道相互作用を摂動的に扱える範囲では，有効電磁場は変更を受けるが存在している[9,10]．特に興味深いのは，**スピン緩和**のもとでは有効電磁場がみたす Maxwell 方程式はモノポール項をあらわに含む形になっていることである[9]．このことはスピン緩和は $U(1)$ 対称性の破れにつながるという点では自然であるが，それでも完全に電磁気の構造を失うことなく Maxwell 方程式の構造を保ったままモノポールにより対称性を破る点は，背後に散逸とモノポールを結ぶ何かの原理がはたらいているようにも思える．ただ，スピン緩和から発生するモノポールはいくつかの点で通常のモノポールとは異なっている．まずこのモノポールは磁化の時間変化から生じているもので，静的には存在できない．またモノポール数は量子化されておらず，したがって幾何学的な意味付けもない．一方でこのモノポールは，電流が Ampère 則により磁場を生み出すのと同じようにその流れが電場そして起電力を発生するので[*10]，実際に実験的に観測可能なものである．むしろこのモノポールは磁化のダイナミクスと起電力をつなぐ重要なはたらきをしており，スピン情報と電気信号を変換する重要な役割を担っているといえる．1つ興味深いのは，この量子化されていないモノポールの周りを運動する電子の波動関数に何か特異な振舞いが現れないかどうかである．通常のモノポールは量子化されているため，周辺の電荷の波動関数は局所的にその存在を感じることはできないが，今のダイナミックなモノポールが有効電荷であるスピンにどういう影響を与えるのかは調べる必要がある．

10. まとめにかえて

以上，金属磁石の中の伝導電子は通常の電磁場とは別にそのスピンに作用するスピン電磁場を感じていることを紹介した．スピン電磁場では幾何学的なモノポールやスピン軌道相互作用から生じるモノポールが存在可能で，これらは磁化構造をうまくつくってやれば実験室でつくることもできる．ただ残念ながらこれらのモノポールは磁化構造に伴って現れるものであるため，それらが出す信号を磁化や通常の磁場による信号と分離することは難しい．電気的測定に加えてミュオンなどのプローブを用いた実験を提案し検出を実現したいと考えている[*11]．

この記事は当時首都大学東京の筆者の大学院生だった竹内祥人氏（青山学院大）が中心に進めた研究が元になっています．ここに感謝します．

*10） 本来はスピンに対しての起電力であるが，強磁性金属ではスピン起電力は必ず電荷に対する起電力を伴うので両者を同じように考えて構わない．

*11） なお，物質中に関しては様々な「モノポール」の話題が最近 *Nature* などの著名学術雑誌を賑わしている．しかし，例えばフラストレートした強磁性体（スピンアイス系）のそれは，磁化の湧き出しをモノポールとよんでいるもので，$\nabla\cdot\boldsymbol{B}$ は 0 であることに注意が必要である．実際，この場合は電荷の電磁気学を問題にしているので，$\nabla\cdot\boldsymbol{B}$ が有限になる真のモノポールが存在してはならない．これに対して本稿で議論した強磁性金属中のモノポールは，スピンに結合する別の電磁場に存在するものであり，この存在は自然法則に反したものではない．読者の混乱がないよう申し添えておく．

参考文献

1) 太田浩一，『電磁気学の基礎 I, II』東京大学出版会，2012.
2) J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison Wesley, 1994.
3) D. Xiao, M.-C. Chang, and Q. Niu, *Rev. Mod. Phys.* **82**, p.1959, 2010.
4) A. Takeuchi and G. Tatara, *J. Phys.: Conference Series* **400**, p.042058, 2012.
5) 多々良源，『スピントロニクス理論の基礎』新物理学シリーズ 40，培風館，2009.
6) 齊藤英治，村上修一，『スピン流とトポロジカル絶縁体—量子物性とスピントロニクスの発展—』共立出版，2014.
7) N. Nagaosa *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **82**, p.1539, 2010.
8) T. Schulz *et al.*, K. Everschor, M. Garst, and A. Rosch, *Nat Phys* **8**, p.301, Apr 2012.
9) A. Takeuchi and G. Tatara, *J. Phys. Soc. Japan* **81**, p.033705, 2012.
10) N. Nakabayashi and G. Tatara, *New J. of Phys.* **16**, p.015016, 2014.

（たたら・げん，理化学研究所）

物質中のモノポールとそのダイナミクス

小 野 田　繁 樹

1. はじめに

現代の物理学においては，この世のあらゆる物質は，莫大なエネルギーないし力によって結合した（恐らくこれ以上不可分な）微細な粒子によって構成されていると考えられている．この素粒子の振舞いを支配する原理を探求する素粒子・高エネルギーの分野では，1995年にトップクォーク，2013年にヒッグス粒子の存在を裏付ける実験結果が報告されたことにより，素粒子の標準模型の基礎が実験的におよそ検証されたと考えられる．しかし，ニュートリノ質量や，物質・反物質の対称性の破れのように標準模型では単純に説明されない課題も残されている．さらに古く，量子化された磁気モノポールが存在する可能性が，Dirac[1]や 't Hooft[2]，Polyakov[3]らによって理論的に指摘されたものの，実験的には検証されていない．

一方，固体などの物質の性質（物性）は，低エネルギーで物質がより安定に存在している状況を想定しており，主に，原子・イオンが構成する結晶構造や結晶中の電子の挙動によって特徴付けられる．素粒子物理学に比べてエネルギースケールがはるかに小さい原子・イオン・電子の世界を取り扱う物性物理学においては，量子電磁気学[*1]の範疇を越える現象は基本的に存在しない．それでも，低エネルギー現象を記述する理論的枠組みにおいて，仮想的な「電磁気学」が創出される場合があり，この「電磁気学」に「磁気モノポール」と同様な数学的構造や，「磁気モノポール」を担う準粒子[*2]が生じることがあるのである．

以下では，物理系の学部学生の基礎的水準を念頭に，真空中および物質中の Maxwell 方程式，結晶中の電子の量子力学的内部自由度であるスピン，さらに，無数の電子スピンが自発的に対称性を破る磁気秩序状態と破らないスピン液体状態について簡単に解説した後，物性において議論されている「磁気モノポール」とそのダイナミクスについて入門的に紹介する．

2. Maxwell 方程式と磁気モノポール

Maxwell 電磁気学から話を始めよう．電磁気学においては，電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ は次の 4 つの Maxwell 方程式（Gauss 単位系）を満たす．

$$\text{Gauss の法則}:\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho_{\mathrm{e}}, \tag{1}$$

$$\text{磁荷に対する Gauss の法則}:\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0, \tag{2}$$

$$\text{Faraday の法則}:\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\text{Ampère の法則}:\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+4\pi\boldsymbol{j}_{\mathrm{e}}\right). \tag{4}$$

ここで c は光速であり，電荷密度 ρ_{e} と電流密度 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{e}}$ は連続の方程式（電荷保存），

$$\frac{\partial\rho_{\mathrm{e}}}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{e}}=0 \tag{5}$$

を満たす．また，スカラー ϕ およびベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}, \tag{6}$$

と導入すると，これらは明らかに Lorentz 不変な波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\boldsymbol{\nabla}^2\right)(\phi,\boldsymbol{A})=4\pi(\rho_{\mathrm{e}},\boldsymbol{j}_{\mathrm{e}}) \tag{7}$$

を満たすようにゲージを選ぶことができる（Lorentz

---

*1) 電場とベクトルポテンシャルが互いに共役となり，光の量子化（光子）を与える点で，古典 Maxwell 電磁気学と異なる．

*2) 高エネルギーでの素粒子とは異なり，低エネルギーの励起を記述する粒子描像での粒子．

ゲージ）．このゲージではさらに $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\boldsymbol{\nabla}^2\right)\chi=0$ をいたるところで満たす関数 χ によって生成される無限小 U(1) ゲージ変換

$$(\phi,\boldsymbol{A})\to(\phi,\boldsymbol{A})+\left(-\frac{\partial}{\partial t},\boldsymbol{\nabla}\right)\chi \tag{8}$$

の下で，以上のあらゆる観測可能な物理量，および，方程式は不変である．また，このゲージ変換によって，電荷 e をもつ荷電粒子の量子力学的波動関数 ψ は，

$$\psi\to\exp\left(i\frac{e}{\hbar c}\chi\right)\psi \tag{9}$$

のように変換される．

さて，仮に磁荷（磁気モノポール）密度 $\rho_{\rm m}$ と磁流密度 $\boldsymbol{j}_{\rm m}$ が存在すると，Maxwell 方程式のうち，式 (2) と (3) の右辺に $4\pi\rho_{\rm m}$ と $\frac{4\pi}{c}\partial\boldsymbol{j}_{\rm m}$ がそれぞれ加わり，電気と磁気に関して双対関係が存在することになる．この場合，式 (6) を満たすベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$，および，波動関数 ψ は一価性を失うことになる．したがって，磁荷と磁流の存在は通常許されない．ところが Dirac は，電荷が量子化されている場合，その電荷の量子化単位を e として $\frac{\hbar c}{2e}$ で量子化された正と負の磁荷は，特異的な弦（Dirac string）によって結ばれた対として生じる限り，例外的に波動関数の一価性を失わないことを理論的に発見した[1]．Dirac の議論とその後の素粒子論での展開の詳細は本特集の他の記事に譲る．ただ，後に述べる物性論での磁気モノポールに関連して 1 つ特筆すべきものがある．'t Hooft[2] と Polyakov[3] らによる素粒子の電弱相互作用と強い相互作用の大統一理論の研究から，コンパクト U(1) ゲージ不変性をもつ理論には質量をもった磁気モノポールが存在することが示されているのである．この**コンパクト U(1) ゲージ理論**に現れるモノポールについては，本記事の後半に物性論における磁気モノポールを，ごく最近重要性が認識されるようになってきた**量子スピンアイス**と呼ばれる磁性体群を例に説明する．

3. 物質中の Maxwell 方程式と「モノポール」

物性論の対象となる物質中においては，電荷保存の式と真空中における Maxwell 方程式の線形性から，電荷密度と電流を

$$\rho_{\rm e}=\rho_{\rm ef}+\rho_{\rm ep},\quad \boldsymbol{j}_{\rm e}=\boldsymbol{j}_{\rm ef}+\boldsymbol{j}_{\rm ep}, \tag{10}$$

のように，着目している電子などの荷電粒子（真電荷）の寄与 $\rho_{\rm ef}$ と $\boldsymbol{j}_{\rm ef}$，および，それ以外の荷電粒子（分子，イオン，他の電子などで，分極電荷と呼ぶ）の寄与を巨視化した $\rho_{\rm ep}$ と $\boldsymbol{j}_{\rm ep}$ とに分けることが便利である．同様にして，電場と磁場も，真電荷の寄与 $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{H}$，および，分極電荷の寄与 $-\boldsymbol{P}$（$\boldsymbol{P}$ を電気分極密度という）と磁化密度 $\boldsymbol{M}$ として通常以下のように表記する．

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{P}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}. \tag{12}$$

このとき，Gauss の法則 (1) と Ampère の法則 (4) から，分極電荷に対して，

$$\boldsymbol{\nabla P}=-4\pi\rho_{\rm ep}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{M}=\frac{1}{c}\left(-\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}+4\pi\boldsymbol{j}_{\rm ep}\right), \tag{14}$$

また，真電荷に対して

$$\text{Gauss の法則}:\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}=4\pi\rho_{\rm ef}, \tag{15}$$

$$\text{Ampère の法則}:\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+4\pi\boldsymbol{j}_{\rm ef}\right) \tag{16}$$

が成立する．磁荷に対する Gauss の法則 (2) と Faraday の法則 (3) は物質中においても不変である．したがって，Maxwell の法則に従う物性論での現象を取り扱う範囲においては，素粒子論の意味での磁気モノポールが発生することはあり得ない．

上記で得られた電気分極や磁化は，例えば，誘電体や磁性体で実際に観測される物理量である．特に，対称性が自発的に破れて巨視的な電気分極，磁化が発生した状態にある物質はそれぞれ強誘電体，強磁性体と呼ばれる．また，電気分極，磁化が物質内部で空間的な構造をもって周期的に発生しているものの，巨視的にはゼロとなる状態にある物質は，反強誘電体，反強磁性体と呼ばれる．結晶構造をなす固体（例えば，電気伝導性の良い/悪い金属/半導体，および，電子が局在した絶縁体（誘電体）など）の性質の多くは，個々の固体中の巨視的な数の電子の量子力学的性質，Fermi 統計性（Pauli の排他則）によって特徴付けられる．例えば，伝導性は，イオンの束縛された電子の量子力学的波動関数の空間的な重なり干渉具合や，イオン，欠陥や他の電子による散乱断面積などによって支配される．

電子にはもう 1 つ重要な量子力学的性質がある．それは内部自由度としてのスピン角運動量である．この電子スピンも磁気モーメントの形で式 (14) の磁化に寄与し，物質の磁気的性質を大きく特徴付ける．特に，2 つの電子スピンの間には，物質の電子構造の詳細に

よって，お互いを平行に揃えようとしたり，反平行に揃えようとしたりするスピン交換相互作用がはたらく．また，結晶中の各格子点の周りに電子波動関数が局在し，スピン自由度のみが残されたようなモット絶縁体においては，Anderson によって指摘されたように，局在電子スピン間の交換相互作用が，幾何学的理由のために拮抗し，そのすべてを安定的に満たすようなスピンの空間配置をとることができない（フラストレートした）場合に，多数のスピン磁気モーメントが自発的に対称性を破る秩序配列を示さないことがある．これはスピン液体と呼ばれている．特に，絶対零度においても磁気秩序が生じないものは量子スピン液体と呼ばれており，現在も物性物理学の最先端の研究課題の一つである[*3)]．

それでは物性論において議論されている「磁気モノポール」とはどのようなものか？ それらは少なくとも以下の 3 つに大別される．

I. **電子波動関数のゲージ接続がもたらす運動量空間の「磁気モノポール」.**

II. **スピンアイスと呼ばれる古典スピン液体状態において，熱励起や印加磁場によって生じる磁化分布の古典的「磁気モノポール」．磁荷に対するクーロンの法則に従って熱拡散を示す.**

III. **量子スピンアイスをはじめとする，コンパクト U(1) ゲージ理論で記述される量子スピン液体における，量子ダイナミクスを示す準粒子としての「磁気モノポール」.**

以下では，これら 3 種類の「磁気モノポール」について順に紹介していく．

4. 固体中の電子波動関数のゲージ接続がもたらす運動量空間の有効磁場の「モノポール」

物質の低温・低周波数・長波長の振舞いを特徴付ける電子状態は，相対論的量子力学に従う波動関数によって記述される[*4)]．また，結晶中では，時間に依存する摂動（電場や変動磁場など）が存在しない場合，結晶ポテンシャルを含んだ Dirac ハミルトニアン H と共役運動量の同時固有状態で，かつ，結晶と同じ周期性をもった Bloch 波動関数 $\Psi_{n,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r})$ が存在する[5)]．

$$H\Psi_{n,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_{n,\boldsymbol{p}}\Psi_{n,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}), \tag{17}$$

$$-i\hbar\boldsymbol{\nabla}\Psi_{n,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{p}\Psi_{n,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}). \tag{18}$$

ただし，n は離散的なエネルギー固有値をラベル付けするエネルギーバンド指数でスピン自由度も含む．運動量固有値 p は結晶運動量による不定性分を取り除いた第一 Brillouin ゾーン内の値をとる[5)]．あるバンド指数 n をもつ Bloch 波動関数 $\psi_{n,\boldsymbol{p}}$ に関する運動量期待値 $\bar{\boldsymbol{p}}_n$ と位置期待値 $\bar{\boldsymbol{r}}_n$ に対して以下の運動方程式が導かれる．

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{p}}_n}{dt} = -e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}_n}{dt}\times\boldsymbol{B}\right), \tag{19}$$

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{r}}_n}{dt} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{\varepsilon}_{n,\boldsymbol{p}} - \hbar\frac{d\bar{\boldsymbol{p}}_n}{dt}\times\boldsymbol{b}_{n,\boldsymbol{p}}. \tag{20}$$

ただし，

$$\boldsymbol{b}_{n,\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{a}_{n,\boldsymbol{p}}, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{a}_{n,\boldsymbol{p}} = i\int_{\text{unitcell}} d^3\boldsymbol{r}\,\psi^*_{n,\boldsymbol{p}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{p}}\psi_{n,\boldsymbol{p}} \tag{22}$$

は Bloch 波動関数の運動量空間におけるゲージ接続[*5)]，曲率である．このゲージ接続 $\boldsymbol{a}_{n,\boldsymbol{p}}$，曲率 $\boldsymbol{b}_{n,\boldsymbol{p}}$ は，有効的に運動量空間におけるそれぞれベクトルポテンシャル，磁場のはたらきをし，Hall 効果を発生させる[7)]．特に，波動関数が運動量空間において多価性を示す場合，特に，湧き出し・沈み込み特異点がある場合には運動量空間に「磁気モノポール」が存在するとみることができる．これは 2 つの電子波動関数のエネルギー固有値が，運動量空間の孤立点でのみ縮退するときに生じる．この運動量空間における「磁場」は異常 Hall 効果（強磁性体などにおけるゼロ磁場での Hall 効果）[8)]という現象を通じて観測されるようになってきている．また，トポロジカル絶縁体の表面に現れる質量をもたない Dirac 電子に，磁場や磁性不純物等による磁化によって質量を与え，そのときに量子化される Hall 伝導度 $\sigma_{xy} = \frac{Ne^2}{h}$ における Chern 数と呼ばれる整数 N[*6)]のとびを観測[9)]することなどを通じて，運動量空間における「磁気モノポール」も検証されようとしている．

---

*3) 筆者は量子スピン液体について日本語で書かれた優れた解説記事を知らないが，例えば，英語の文献 4) は学部専門課程の知識があれば十分に読み応えがあろう．

*4) 実際の計算には，非相対論極限からの $\frac{e^2}{\hbar c}$ に関する展開として得られる Pauli のハミルトニアンに，スピン軌道相互作用を取り込んだものがしばしば用いられる．

*5) 幾何学的理由から発生する断熱的位相との類似から，Berry 位相[6)]とも呼ばれている．

*6) $N = \sum_n \int_{\text{F.B.Z.}} d^2\boldsymbol{p}\, b^z_{n,\boldsymbol{p}} f(\varepsilon_{n,\boldsymbol{p}})$ は，絶縁体において整数を与える．ただし，$f(\varepsilon)$ は Fermi 分布関数，運動量積分は第一 Brillouin ゾーン内に限られる．

5. 古典スピンアイスにおける「磁気モノポール」

局在電子スピンの自由度が顕在化した Mott 絶縁体のうち，パイロクロア格子構造（図 1 参照）をとる物質に，スピンアイス[10)]と呼ばれている磁性体，$Dy_2Ti_2O_7$ や $Ho_2Ti_2O_7$ が存在する．これらの物質では，パイロクロア格子点に位置する Dy や Ho のイオンに電子が局在して磁気モーメントをもつ．互いに $\boldsymbol{r}$ だけ離れた磁気モーメント $\boldsymbol{m}_1$ と $\boldsymbol{m}_2$ は，主として，電磁気学から導かれる磁気双極子相互作用

$$H_{\mathrm{D}} = \frac{\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{m}_2}{|\boldsymbol{r}|^3} - 3\frac{(\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{m}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}|^5} \qquad (23)$$

によって力を及ぼし合い，特に，最近接格子点の磁気モーメントの向きを平行に揃えるようにはたらく．ところが，相対論的スピン軌道相互作用と周囲のイオンが作る分極電場の効果のために，電子磁気モーメントはパイロクロア格子の単位構造である正四面体の中央に向かって内側ないし外側のどちらかにしか向くことが許されない．その結果，これらの磁性体を 1 K 程度の極低温まで冷却しても，上述の幾何学的フラストレーション[10)]のためにすべての電子磁気モーメントを平行に揃えることはできず，2-in, 2-out（図 2 (a)）の磁気構造を取ろうとする．ところが，パイロクロア格子上のすべての正四面体上の磁気モーメントが 2-in, 2-out のスピンアイス則を満たす場合の数は，結晶中の格子点の数に対して指数関数的に大きくなる．したがって，単純には絶対零度においても巨視的な縮退，エントロピーが有限に残ることになり，磁気秩序は生じない[*7)]．この 2-in, 2-out 構造は，六方晶の氷において正四面体の各頂点に位置する水素イオンが，正四面体中心の酸素イオンと水素結合するために変位する構造と同じである．スピンアイスという命名はここに由来する．

ここで格子ゲージ理論の発想を適用すると話が分かり易くなる．正四面体中心は 2 つの面心立方副格子からなるダイアモンド格子を形成する．その格子点 $\boldsymbol{R}_\pm$（$\pm$ は面心立方副格子の自由度）を中心から，4 つの隣接するパイロクロア格子点への変位ベクトルは，$\pm\frac{be_\mu}{2}$（$b=\frac{\sqrt{3}a}{4}$ で，a は立方格子定数）と表される．このときパイロクロア格子点上の磁気モーメントは，$\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{R}_\pm \pm \frac{be_\mu}{2}} = mS^z_{\boldsymbol{R}_\pm \pm \frac{be_\mu}{2}}\boldsymbol{e}_\mu$ と書き表される．ただし，m は磁気モーメントの大きさ（古典スピンアイスでは $10\mu_{\mathrm{B}}$（μ_{B} はボーア磁子）），$S^z = \pm\frac{1}{2}$ は隣接する 2 つのダイアモンド格子点（面心立方副格子点）のうち，どちらの面心立方副格子に属する正四面体中心を向くかを表す自由度である．ここで正四面体中心 $\boldsymbol{R}_\pm$ に対して，ゲージチャージを

$$Q_{\boldsymbol{R}_\pm} = \pm\sum_{\mu=0}^{3} S^z_{\boldsymbol{R}\pm\frac{be_\mu}{2}} \qquad (24)$$

として定義すると，この式は

$$E_{\boldsymbol{R}_\pm,\boldsymbol{R}_\pm \pm be_\mu} = \pm S^z_{\boldsymbol{R}_\pm \pm \frac{be_\mu}{2}} \qquad (25)$$

を隣接する磁気モーメントのリンク上で定義された場[*8)]と見た立てときの格子上の Gauss の法則の形と

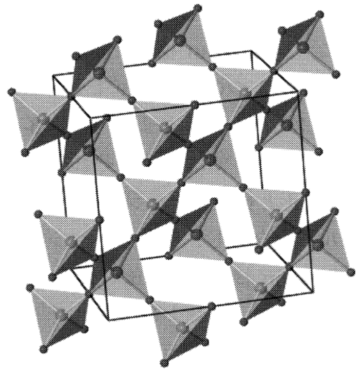


図 1　パイロクロア格子構造．スピンアイス，および，量子スピンアイスと呼ばれている物質においては，陰影をつけた正四面体の頂点に，電子磁気モーメントが局在している．正四面体の中心はダイアモンド格子構造を形成し，パイロクロア格子とは双対格子空間をなす．

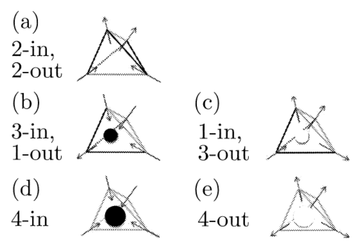


図 2　パイロクロア格子構造の単位構造である正四面体頂点に局在した電子の磁気モーメント．(a) 正四面体中心に 2 つのモーメントが内向き，残り 2 つが外向きを向いた構造．古典スピンアイスにおいて最も安定な配置．(b/c) 3 つが内/外向き，1 つが外/内向き．(d/e) 4 つすべてが内/外向き．

*7）実際には磁気双極子相互作用の長距離部分から，0.1 K 程度で秩序が生じる可能性が理論的に指摘されているが，実験的は検証されていない．

*8）次節では，ゲージチャージを「電荷」に，場を「電場」に見立てるが，磁気に見立てても理論の構成が可能である．

なっており，全系にわたる中性条件 $\sum_{\boldsymbol{R}} Q_{\boldsymbol{R}} = 0$ を満たす．特に，2-in, 2-out 構造では $Q_{\boldsymbol{R}} = 0$ である．正四面体に属する 1 つの電子磁気モーメントを熱力学的に励起した 3-in, 1-out および 1-in, 3-out の構造（図 2 (b) および (c)）では，それぞれ $Q_{\boldsymbol{R}} = +1$ および -1 となる，正と負のチャージ（**スピンアイスの「磁気モノポール」**，ないし，磁化のヘッジホッグ状点欠陥）が現れる．4-in および 4-out の構造（図 2 (d) および (e)）でも同様に $+2$ および -2 のチャージが現れる．さらに，磁気双極子相互作用の長距離部分は，これらの「磁気モノポール」間の磁気クーロン力として記述することが可能である．つまり，クーロンの法則に従う「磁気モノポール」が理論上出現可能であることを意味する．スピンアイスの「磁気モノポール」を観測したという実験的報告も出されているが，確実に捉えられたと言える段階には至っていない．

6. 量子スピンアイス，コンパクト U(1) ゲージ理論における「磁気モノポール」

古典スピンアイスにおいては，量子力学に端を発した電子磁気モーメント，ないし，「磁気モノポール」が，極低温においては量子力学を離れ，古典熱統計力学に従っていた．ところが，量子スピンアイスと呼ばれる磁性体群の候補である $Pr_2Sn_2O_7$, $Pr_2Zr_2O_7$, および，$Yb_2Ti_2O_7$ においては，隣り合うパイロクロア格子点上の Yb や Pr イオンの局在電子磁気モーメント間には，2-in, 2-out を構成しようとする古典スピンアイス型の相互作用（J_z）の他に，磁気モーメントを反転させる交換相互作用（J_{xy}）がはたらき，in と out の 2 状態をサイト間で量子力学的に交換できることが理論的に示されている[11]．これは非弾性中性子散乱実験からも検証されている[12~14]．したがって，極低温に冷却するにつれて，隣り合う磁気モーメントは 2-in, 2-out のスピンアイス構造を取ろうとする（スピンアイスの「磁気モノポール」が抑制される）のと同時に，図 3 に示すように，隣合う in と out の磁気モーメント（矢印）の対を反転させようとする*9)．

では，前節の古典スピンアイスの議論において有用であった格子ゲージ理論を量子系に発展させよう．まず，ゲージチャージ式 (24) に共役，したがって，量子力学の交換関係

*9)　どの 2-in, 2-out の古典スピンアイス状態も，量子スピンアイスの固有状態ではない．

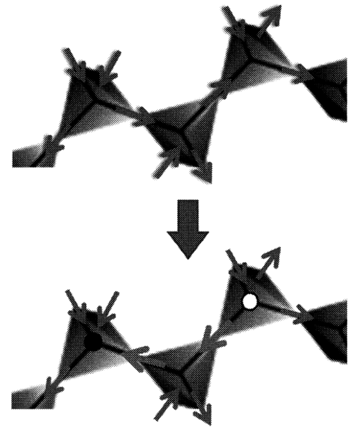


図 3　量子スピンアイスにおける磁気モーメントのフリップと，ゲージチャージ分布の変化．

$$[\varphi_{\boldsymbol{R}}, Q_{\boldsymbol{R}'}] = i\delta_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}'}. \tag{26}$$

を満たす位相 $\varphi_{\boldsymbol{R}}$ を導入すると，$\exp[\pm i\varphi_{\boldsymbol{R}}]$ はゲージチャージを 1 だけ減少（増加）させる演算子であることが分かる．同様に，式 (25) の電場で表される in か out かの磁気モーメントの 2 状態を反転させる演算子は，交換関係

$$\left[A_{\boldsymbol{R}_+,\boldsymbol{R}_++b\boldsymbol{e}_\mu}, E^z_{\boldsymbol{R}'_+,\boldsymbol{R}'_++b\boldsymbol{e}_\nu}\right] = i\delta_{\boldsymbol{R}_+,\boldsymbol{R}'_+}\delta_{\mu,\nu} \tag{27}$$

を満たす電場 E に共役なベクトルポテンシャル A を用いて，$U^{\pm}_{\boldsymbol{R}_+,\boldsymbol{R}_++b\boldsymbol{e}_\mu} = \exp[\pm iA_{\boldsymbol{R}_+,\boldsymbol{R}_++b\boldsymbol{e}_\mu}]$ と表される．この格子上でのゲージ場 U は A について 2π の周期性を示す（コンパクトゲージ場である）点で，通常の電磁気学と異なる．結局，量子スピンアイスに対する最も簡単な有効ハミルトニアンは，$E^2 = \pm\frac{1}{2}$ の拘束条件下で，

$$H_{\mathrm{QSI}} = \sum_{\sigma=\pm}\sum_{\boldsymbol{R}_\sigma}\left[\frac{J_z}{2}Q^2_{\boldsymbol{R}_\sigma} + 2J_{xy}\sum_{\sigma=\pm}\sum_{\mu>\nu=0}^{3}\cos\left(\Delta_\mu\varphi_{\boldsymbol{R}_\sigma} - \Delta_\nu\varphi_{\boldsymbol{R}_\sigma}\right)\right] \tag{28}$$

となる*10)．ただし，格子上でのゲージ変換

$$\varphi_{\boldsymbol{R}} \to \varphi_{\boldsymbol{R}} + \chi_{\boldsymbol{R}}, \tag{29}$$

$$\exp[iA_{\boldsymbol{R}_+,\boldsymbol{R}_-+b\boldsymbol{e}_\mu}] \to \exp[i(A_{\boldsymbol{R}_+,\boldsymbol{R}_-+b\boldsymbol{e}_\mu} + \chi_{\boldsymbol{R}_-+b\boldsymbol{e}_\mu} - \chi_{\boldsymbol{R}_+})] \tag{30}$$

*10)　より現実的な，正確だが複雑なスピン模型については，文献 11) に与えられている．また，議論を簡単にするため，$J_{xy} > 0$ とする．

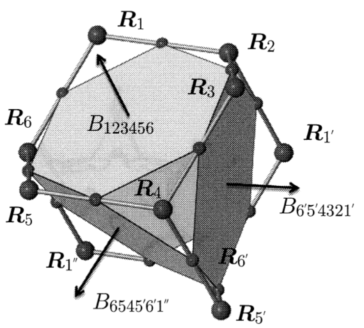


図 4 量子スピンアイスにおける 6 サイトで囲まれた面を貫く「磁場」B（矢印）．図の 4 つの隣接する面を貫く「磁場」の湧き出し・吸い込みが「磁気モノポール」を与える．

の下で共変な微分形，

$$\Delta_\mu \varphi_{\boldsymbol{R}_\sigma} = \varphi_{\boldsymbol{R}_\sigma+\sigma b\boldsymbol{e}_\mu} - \varphi_{\boldsymbol{R}_\sigma} - A_{\boldsymbol{R}_\sigma,\boldsymbol{R}_\sigma+\sigma b\boldsymbol{e}_\mu} \quad (31)$$

を導入した．式 (28) は格子上の量子電磁気学，可換 Higgs 模型の形式となっており，非閉じ込め相（量子スピン液体相）と閉じ込め相（磁気秩序相）をもつ．特に非閉じ込め相では，低エネルギー励起を記述する準粒子として，質量・エネルギーギャップを持った，ゲージチャージ「電荷」(式 (24)) を運ぶスピノン（図 2 (b-e)）と「磁気モノポール」，および，質量をもたない「光子」を有する[15]．ここでの「磁気モノポール」とは，パイロクロア格子上の最小の閉曲線（図 4）に沿ったベクトルポテンシャル A の渦からこの面を貫く「磁場」，ないし，「磁束」を

$$B_{123456} = \sin\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1,\cdots,6} A_{\boldsymbol{R}_i,\boldsymbol{R}_{i+1}}\right) \quad (32)$$

と定義したときに，格子上の Gauss の法則

$$q = B_{123456} + B_{6'5'4321'} + B_{6545'6'1''} + B_{1'21651''6'} \quad (33)$$

から与えられる「磁荷」である（サイトのラベルは図 4 を参照のこと）．また，Higgs 場（スピノン）が凝縮して位相 φ が固定された Higgs 相は，$Yb_2Ti_2O_7$ における低温強磁性相として観測されている．この相では，Anderson–Higgs 機構のために「光子」が Higgs 場（スピノン）に吸収され[17]，電子系のあらゆる励起がエネルギーギャップをもつ．ただし，モノポール励起子を含む，これらの励起子の実験的検証は今後の課題となっている．

7. 結び

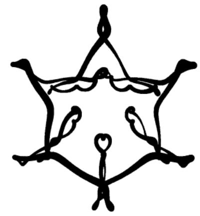
以上，物性物理学において話題となっている「磁気モノポール」について述べてきた．いずれの場合も実験的検証にはもうしばらく時間を要するであろう．

参考文献

1) P.A.M. Dirac: *Proc. Roy. Soc. A* **133**, 60–72 (1931); ポール・A・M・ディラック：『ディラック現代物理学講義』筑摩書房 (2008).
2) G. 't Hooft: Magnetic monopoles in unified gauge theories, *Nucl. Phys. B* **79**, 276 (1974).
3) A.M. Polyakov: Particle Spectrum in the Quantum Field Theory, *JETP Lett.* **20**, 194 (1974).
4) P.A. Lee: An end to the drought of quantum spin liquids, *Science* **321**, 1306 (2008).
5) N・アシュクロフト，D・マーミン：『固体物理の基礎』（上・1）固体電子概論，（上・2）固体のバンド理論．吉岡書店 (1981).
6) J・J・サクライ：『現代の量子力学』（上・下），吉岡書店 (1989). 付録にベリー位相に関する解説がある．
7) 永長直人：固体電子論におけるベリー位相，日本物理学会誌 **59**(8), 520 (2004).
8) N. Nagaosa, J. Sinova, S. Onoda, A.H. MacDonald, and N.P. Ong: Anomalous Hall effect, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1539 (2010).
9) C.-Z. Chang *et al.*: *Experimental Observation of the Quantum Anomalous Hall Effect in a Magnetic Topological Insulator*, Sciencexpress. 1234414 (2013).
10) R. Moessner and A.P. Ramirez: Geometrical frustration, *Physics Today* **59**(2), 24 (2006).
11) S. Onoda and Y. Tanaka: Quantum fluctuations in the effective pseudospin-12 model for magnetic pyrochlore oxides, *Phys. Rev. B* **83**, 094411 (2011).
12) H.D. Zhou *et al.*: Dynamic spin ice: $Pr_2Sn_2O_7$, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 227204 (2008).
13) K.A. Ross, L. Savary, B.D. Gaulin, and L. Balents: Quantum Excitations in Quantum Spin Ice, *Phys. Rev. X* **1**, 021002 (2011).
14) K. Kimura, S. Nakatsuji, J.-J. Wen, C. Broholm, M.B. Stone, E. Nishibori, and H. Sawa: Quantum fluctuations in spin-ice-like $Pr_2Zr_2O_7$, *Nature Communications* **4**:1934 (2013).
15) M. Hermele, M.P.A. Fisher, and L. Balents: Pyrochlore photons: The $U(1)$ spin liquid in a $S=\frac{1}{2}$ three-dimensional frustrated magnet, *Phys. Rev. B* **69**, 064404 (2004).
16) L.-J. Chang, S. Onoda, Yixi Su, Y.-J. Kao, K.-D. Tsuei, Y. Yasui, K. Kakurai, and M.R. Lees: Higgs transition from a magnetic Coulomb liquid to a ferromagnet in $Yb_2Ti_2O_7$. *Nature Communications* **3**:992 (2012).
17) 九後汰一郎：『ゲージ場の量子論 II』培風館 (1989).

（おのだ・しげき，理化学研究所）

カラーモノポールとクォーク閉じ込め



近 藤　慶 一

1. クォークの閉じ込めとは何か

我々の身の周りにある物質は原子からできているが，その原子は原子核とその周りにいる電子からなる．原子核はさらに**陽子**と**中性子**の2種類の粒子（まとめて**核子**と呼ぶ）から構成されている．電子は，負の素電荷 $-e$ を持つが，陽子は，その反対の正の電荷 $+e$ を持つ．一方，中性子はその名の通り電荷を帯びていない．

原子核が核子から構成されているなら，核子間には原子核を離散させないように働く力，すなわち**核力**が必要だが，湯川秀樹は中間子（メソン）と後で呼ばれる（電子と核子の“中間”の質量を持つ）素粒子を提唱し，それらを核子間に交換することで核力を説明した．

1960年代半ばまでは，陽子，中性子と中間子は電子と共に素粒子と考えられていたが，1960年代後半から，それらは電子は除いて素粒子ではなく，Murry Gell-Mann が提唱した**クォーク**（**quark**）と呼ぶ素粒子から構成される**複合粒子**（束縛状態）として認識されるようになった．クォーク q は電子と同様にスピン $\frac{1}{2}$ を持つフェルミ粒子であるが，現在では，質量の小さいものから並べて6種類 u, d, s, c, b, t が知られている．これらの違いを**フレーバー**と呼ぶ．ただし，u と d の質量はほぼ等しい．u, c, t は $+\frac{2}{3}e$ の正電荷を持ち，d, s, b は $-\frac{1}{3}e$ の負電荷を持つと考える．素粒子を記述する理論的枠組みである**相対論的場の量子論**の帰結として，すべての素粒子には質量は等しいが，電荷等の量子数が反転した**反粒子**が存在するので，それぞれのクォーク q にはその反粒子 $\bar{q}$ が存在し，$\bar{u}, \bar{c}, \bar{t}$ は $-\frac{2}{3}e$ の負電荷を，$\bar{d}, \bar{s}, \bar{b}$ は $+\frac{1}{3}e$ の正電荷を持つ．

事実，陽子 p と中性子 n は，クォーク3個から構成される qqq と考えると電荷を正しく再現する：

$$p \sim uud, \quad n \sim udd. \tag{1}$$

一方，中間子はクォークと反クォークの対 $q\bar{q}$ で構成されると考える．例えば，π 中間子は，電荷の異なる3種類があるが，次のようになる：

$$\pi^+ \sim u\bar{d}, \quad \pi^- \sim d\bar{u}, \quad \pi^0 \sim u\bar{u} - d\bar{d}. \tag{2}$$

第1世代に属する u と d 以外のクォーク（第2世代の c, s，第3世代の t, b）は安定でない（瞬時に他の素粒子に崩壊する）ので，安定な複合粒子を構成しない．

現在の素粒子論では，素粒子は物質粒子と力の媒介粒子に分類されるが，**物質粒子**にはクォークとレプトン（lepton）と呼ばれる電子とニュートリノの仲間たちが知られている．**力の媒介粒子**には物質粒子間を交換することで4種類の相互作用（電磁力，弱い力，強い力，重力）のそれぞれを伝える光子（photon），ウィークボソン（weak boson），グルーオン（gluon），重力子（graviton）が考えられる（最近発見された Higgs（ヒッグス）粒子は，この例外である）．これらの素粒子のうち，レプトンと光子，ウィークボソンは既に発見され，重力子も技術的な難しさはあるがいずれ発見されると考えられている．ところが，**強い力**（相互作用）の働くクォークと，それを媒介する**グルーオン**はこれまで発見されていない．現在ではこれらの素粒子が単独で取り出せないのは，技術的問題や実験家の努力不足というわけではなく，強い力特有の原理的理由があると考えられるようになった．これを，クォークは核子の中に閉じ込められていて外に出られないと捉え，「**クォークの閉じ込め（仮説）**」と呼ぶ．

実はグルーオンも，自分自身の強い力によって束縛状態を作ることができて（これは電磁力を媒介する光子とは異なる）**グルーボール**と呼ばれる複合粒子とな

れば観測できると考えられている．実験でその候補はいくつか見つかっているが，まだ確定してはいない．グルーオンもグルーボールの中に閉じ込められていて単独では取り出せない．つまり，強い力の媒介粒子であるグルーオンも閉じ込められていると考える．

もし，クォークが単独で発見されれば，分数電荷 $+\frac{2}{3}e$ や $-\frac{1}{3}e$ が見出されるので，e を素電荷と呼ぶ意味はなくなる．グルーオンは電荷を持たないので，その困難はない．では発見されても問題はないのであろうか．これに答えるために，以下の考察をしてみよう．電気力は，電荷の間に働く．では，強い力は何の間に働くのかというと，強い力の源となる荷電つまり**カラー電荷**または**色電荷**を想定する（カラーは，南部と Han によって 1965 年に導入された）．つまり，クォークやグルーオンは色電荷を持つのでそれらの間には，強い力が働く．強い力を記述する理論を**量子色力学**（Quantum Chromodynamics; QCD）と呼ぶのはこのためで，電磁力を記述する量子電磁気力（Quantum Electrodynamics; QED）と対照をなしている．もし，クォークやグルーオンが単独で観測されるならばそれらの持つカラー電荷が観測されることになる．カラー電荷には 3 種類（3 色）あり，各クォークは，この 3 色のどのカラーも対等にとり得る．見方をかえると，個々のカラーが観測できないという原理からクォークやグルーオンが単独で観測されないことを説明できる．クォークは，それぞれ異なる色を持つ 3 個のクォークが集まって陽子や中性子のような**バリオン**になるか，ある色を持つクォークとその補色を持つ反クォークの対で π 中間子のような**メソン**になることで，全体で無色（白色）の組合せを構成したときに限り（これを**カラーシングレット**と呼ぶ），観測されると考えると，分数電荷の未発見を含む実験事実をうまく説明できる．これは，クォーク閉じ込めやグルーオン閉じ込めを含む，より一般的な原理で「**カラーの閉じ込め（仮説）**」と呼ばれる．それゆえ，カラー閉じ込めを証明すれば，クォークやグルーオンの閉じ込めは自動的に導出されるはずが，残念ながらその証明は得られていない[2]．以下では，クォーク閉じ込めに限定する．

2. クォークポテンシャルと Wilson ループ

ではクォークが閉じ込められていることをどうやって示せばよいだろうか．最もよく用いられる方法は，距離 R だけ離れたクォーク・反クォーク間の静的ポテンシャル（**クォークポテンシャル**）$V_{q\bar{q}}(R)$ が

$$V_{q\bar{q}}(R) \to \infty \quad (R \to \infty \text{ に対して}) \qquad (3)$$

を満たすならば，クォーク q と反クォーク $\bar{q}$ を引き離すのに無限大のエネルギーを必要とする（言い換えると，有限のエネルギーをメソンに投入しても q と $\bar{q}$ は引き離せない）ことを意味し，クォーク（と反クォーク）は閉じ込められていると判定する．

強い相互作用を記述する **Yang–Mills（ヤン・ミルズ）理論**[1] あるいは QCD は非可換の**ゲージ理論**であり，物理的に意味ある観測量は**ゲージ不変**でなくてはならない．ゲージ不変にクォークポテンシャルを定義するには **Wilson（ウィルソン）ループ演算子** $W_C[\mathscr{A}]$ を用いる[3]．$W_C[\mathscr{A}]$ は向きの付いた閉じた経路，すなわちループ C に対して，ゲージ群 G の Lie 代数 $\mathscr{G}$ に値を持つ Yang–Mills 場 $\mathscr{A}_\mu(x)$ を用いて次のように定義される：

$$W_C[\mathscr{A}]=\mathcal{N}\mathrm{tr}\left[\mathscr{P}\exp\left\{i\oint_C dx^\mu \mathscr{A}_\mu(x)\right\}\right]. \qquad (4)$$

$\mathscr{A}_\mu(x)$ は行列なので一般には非可換であるため，掛け算する順序を指定しないと一意的に定まらない．ここで，$\mathscr{P}$ は経路順序積と呼ばれ，ループ C に沿う線積分を微小区間に分割し，それらを C の向き付けの順番に従って掛け算することを意味する．また tr は，行列の跡（トレース）をとることを意味し，因子 $\mathcal{N}=\frac{1}{\mathrm{tr}(\mathbf{1})}$ は，$W_C[\mathscr{A}\equiv 0]=1$ とする規格化のためにある．

ゲージ群 G が可換群 $U(1)$ の場合には，$\mathscr{A}_\mu(x)$ は単なる実数場 $A_\mu(x)$ となり，経路順序積 $\mathscr{P}$ は不要になる．もちろん tr も必要ない．$W_C[A]$ は，$G=U(1)$ の元で，絶対値 1 の複素数となる：

$$W_C[A]=\exp\left\{i\oint_C dx^\mu A_\mu(x)\right\} \in U(1). \qquad (5)$$

$W_C[\mathscr{A}]$ の真空期待値 $W(C)=\langle 0|W_C[\mathscr{A}]|0\rangle$ を **Wilson ループ期待値**と呼ぶ．経路積分表示を用いると

$$W(C)=Z_{\mathrm{YM}}^{-1}\int \mathscr{D}\mathscr{A}\, e^{iS_{\mathrm{YM}}[\mathscr{A}]}W_C[\mathscr{A}], \qquad (6)$$

ここで $S_{\mathrm{YM}}[\mathscr{A}]$ は，Yang–Mills 理論の作用積分 $S_{\mathrm{YM}}[\mathscr{A}]=\int d^Dx\mathscr{L}_{\mathrm{YM}}(x)$ で，Yang–Mills 理論の Lagrangian 密度 $\mathscr{L}_{\mathrm{YM}}$ の D 次元の時空間（時間 1 次元，空間 $D-1$ 次元）に渡る多重積分で定義され，$\mathscr{D}\mathscr{A}$ は積分測度を表す．$S_{\mathrm{YM}}[\mathscr{A}]$ と $\mathscr{D}\mathscr{A}$ は $W_C[\mathscr{A}]$ 同様ゲージ不変である．

特に，ループ C を時間方向の長さ T，空間方向の長

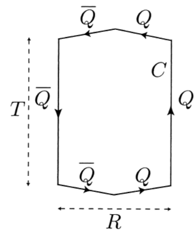


図 1　クォークポテンシャルを求めるための Wilson ループ.

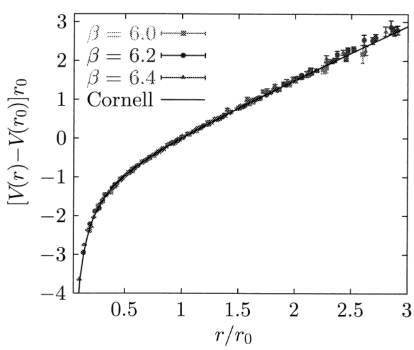


図 2　格子ゲージ理論でシミュレーションしたクォークポテンシャル[4]. $V(r_0) = 0$ に規格化.

さ R の長方形に選ぶとクォークポテンシャル $V_{q\bar{q}}(R)$ は, Willson ループ期待値 $W(C)$ から求められる：

$$V_{q\bar{q}}(R) = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln W(C). \tag{7}$$

これは, T が十分大きいと, $W(C)$ が

$$W(C) \simeq \exp\left[-V_{q\bar{q}}(R)T\right] \tag{8}$$

と振る舞うことから従う[2]（図 1 参照）.

Yang–Mills 理論は非線形であり $W(C)$ を正確に計算することは一般には難しい（非線形でも弱結合な場合には振動展開法が使える）. しかし, 計算機の発達によって, ゲージ理論を時空間の格子上で定義する近似法である**格子ゲージ理論**に従って 1980 年代に入ってから $W(C)$ を数値的に計算することが可能となった. その結果（図 2 参照）クォークポテンシャルは,

$$V_{q\bar{q}}(R) = -\frac{\alpha}{R} + \sigma R + C \tag{9}$$

となる（α, σ, C はフィットパラメータ）. これは, R が十分小さいと, クーロンポテンシャルに類似しているが, R が大きくなると**線形ポテンシャル**に近づくことから, $V_{q\bar{q}}(R) \to \infty$ $(R \to \infty)$ が確かに成立して, クォーク閉じ込めを示唆する. この事実は, 電磁気学において, 電荷間に働くクーロンポテンシャル $\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}$ と比較して際立った違いである.

3. クォーク閉じ込めの双対超電導描像とカラーモノポール

電磁気におけるクーロンポテンシャルは, 電荷 q から出る電場 $\boldsymbol{E}$ のフラックス（電束）が, 3 次元空間に等方的に拡がり, 半径 R の球面上で面積分すれば電荷 q を再現する（Gauss の法則）ことを意味する. 一方, Yang–Mills 理論では, 線形ポテンシャル $V = \sigma R$ を微分して $\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}V = -\sigma \boldsymbol{e}_z$ となるから, q と $\bar{q}$ 間には, 一定の引力（$-\sigma$）が働くことがわかる. すなわち, カラー電荷から出るカラー電場が, 空間的に拡がれずに 1 次元的に絞られる, あるいは, カラー電束は q と $\bar{q}$ をつなぐ弦あるいは紐状になることを意味する. これを**ハドロン弦**あるいは **QCD 弦**と呼ぶ（これが現在の弦理論の発祥）.

この物理的根拠は何であろうか. これに類似した既知の物理的現象はないかと考えると, **超伝導**における **Meissner**（**マイスナー**）**効果**を思い出す. つまり, 超伝導体は外から印加した磁場をできる限り排除しようとするが, あまりに強い磁場をかけると超伝導が破壊される. しかし, 第 2 種超伝導体においては, 磁場の侵入を部分的に許しはするが, 磁束は拡がれずに絞られ **Abrikosov**（**アブリコソフ**）**渦糸**を形成する. ここで, 電気と磁気の役割を入れ替える**双対変換**を施すとクォーク・反クォークのカラー電荷をソースとするカラー電束が弦状に絞られる**双対 Meissner 効果**が起こるような**双対超伝導**が得られるだろう（図 3 参照）. Meissner 効果が電荷を持った物体（電子）が Cooper（クーパー）対を形成し**凝縮**（ぎょうしゅく）することによって起こることから, 双対 Meissner 効果は, 磁荷的な**カラーモノポールの凝縮**によって引き起こされるであろう. ここで初めてカラーモノポールの存在がカラー閉じ込めに寄与する可能性が出てきた.

このアイデアが, 1970 年代に既に南部陽一郎, 't Hooft および Mandelstam らによって提唱されたクォーク閉じ込めの双対超伝導仮説である[5]. これは双対 Meissner 効果とカラーモノポールの凝縮によって特徴付けられる. まず, カラーモノポールは可換ゲージ理論における **Dirac モノポール**[6]ではあり得ない.

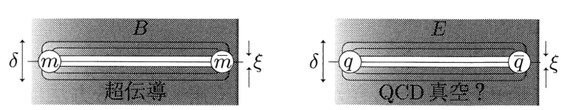


図 3　（左図）超伝導,（右図）双対超伝導.

非可換ゲージ理論においても，Higgs 場のようなスカラー場が存在している場合には，**'t Hooft–Polyakov（トフト–ポリヤコフ）モノポール**[7]と呼ばれるモノポールが導入できることが既に 1970 年代に知られていた．大統一理論に現れるモノポールは，このタイプのモノポールで，元のゲージ理論が持っていた大きなゲージ対称性 G が Higgs 場の存在のために自発的にその部分対称性 H に破れるときに現れる[8]．QCD においては Higgs 場は存在せずカラー $SU(3)$ のゲージ対称性は常に保持されると考えられる．そうでないと，カラー閉じ込めの概念が意味を失う．

QCD において双対超伝導を確立するためには以下の 3 つの疑問に答えなければならない．すなわち，非可換ゲージ理論において Higgs 場が存在しないときに，

- どのようにしてモノポールを導入できるか．
- 双対性はどのように定義されるのか．
- 元々のゲージ対称性を保つようにできるのか．

4. Wilson ループとモノポール

ゲージ群 $U(1)$ を持つゲージ理論である Maxwell 理論では，磁荷が存在しないという実験事実に基づいて Maxwell 方程式の一つとして

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{10}$$

を採用している．これの明白に Lorentz 共変な表式は，4 元ポテンシャル $A^\mu(x) = \left(\frac{1}{c}\phi(x), \boldsymbol{A}(x)\right)$ から電磁場テンソル $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ を定義すると

$$\partial_\nu^* F^{\mu\nu} = 0 \iff \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0 \tag{11}$$

と書ける．(11) は A^μ が特異でない限り常に成り立ち，**Bianchi（ビアンキ）恒等式**と呼ばれる．A^μ に特異性を許すと Bianchi 恒等式を破ることが可能になる．これが Dirac モノポールである：

$$\partial_\nu^* F^{\mu\nu} = k^\mu \quad (\delta^* F = k). \tag{12}$$

この k^μ はモノポールカレントで，その時間成分が磁荷密度 ρ_m，空間成分が磁流 $\boldsymbol{j}_m$ である：$k^\mu = (\rho_m, \boldsymbol{j}_m)$．こうすると，Maxwell 方程式のもう半分

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu \quad (\delta F = j) \tag{13}$$

と併せて，対称的で非常に美しい形になる．

双対超伝導仮説が示唆するように，モノポールがクォーク閉じ込めに関与しているならば，Wilson ループ演算子にモノポールの寄与が反映しているかもしれ

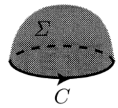


図 4　Wilson ループ C とそれを境界とする面 Σ.

ない．実際それは以下のようにして見ることができる．$U(1)$ の Wilson ループ演算子 $W_C[A]$ で，C に沿う線積分を Stokes の定理を用いて C を境界とする面 Σ 上の面積分に書き換えることができる：

$$W_C[A]=\exp\left\{ig\int_\Sigma dS^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right\}. \tag{14}$$

面 Σ 上でのみ値をとる 2 階反対称テンソル場

$$\Theta_\Sigma^{\mu\nu}(x)=\int_\Sigma dS^{\mu\nu}(x(\sigma))\delta^D(x-x(\sigma)) \tag{15}$$

を導入すると，面積分を時空間積分に直せて

$$W_C[A]=\exp\{ig(\Xi_\Sigma,k)+ig(N_\Sigma,j)\}. \tag{16}$$

ここで，$\Xi_\Sigma(x)$ と $N_\Sigma(x)$ は，Σ から幾何学的に決まる量で，それぞれ $(D-3)$-微分形式と 1-微分形式である．$(\ ,\ )$ は p-微分形式に対する L^2 内積である[9)]．

Dirac モノポールを考えなければ，$k^\mu=0$ となり，この場合には Wilson ループ期待値からポテンシャル $V(R)$ を正確に経路積分を実行して計算することができて，$D=4$ 次元では，電磁的クーロンポテンシャル

$$V(R)=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{g^2}{R} \tag{17}$$

を再現する．$k^\mu\neq 0$ の場合にどうなるか興味あるところだが，Dirac モノポールは $A^\mu(x)$ の特異点で定義されているため，古典的に個々の特異配位に対して定義はできるものの，量子論としては，それを導くような場の一般的配位や積分測度は不明であり，評価することは困難である．これは Yang–Mills 場の自己双対方程式の解であるインスタントンや't Hooft–Polyakov モノポールが古典場の運動方程式の解として定義され，それらを特徴付ける有限個の集団座標（モジュライ空間）に関して積分測度が定義できて系統的計算が原理的には可能なのとは異なる．

実は上の議論は非可換の場合に拡張できて，Dirac モノポールのような特別な特異点を恣意的に導入せずに，元々のゲージ対称性を保つようなゲージ不変なカラーモノポールが Higgs 場無しに定義できることがわかる[9)]．

5. カラーモノポールの閉じ込めへの寄与

$G=SU(2)$ の非可換 Wilson ループ演算子も経路積分の方法を用いると面積分の形に書き換えられる[9, 10)]：

$$W_C[\mathscr{A}]=\int[d\mu(\boldsymbol{n})]_\Sigma\exp\left\{i\frac{1}{2}g_{\rm YM}\int_\Sigma dS^{\mu\nu}f_{\mu\nu}\right\}. \tag{18}$$

この表示の特筆すべき点は，元々の経路順序積が現れないことである．ここで，ゲージ群 $SU(2)$ の任意の要素 $g(x)\in SU(2)$ を用いて，Lie 代数 $su(2)$ に値をとる場 $n^A(x)$ $(A=1,2,3)$ を導入する：

$$\boldsymbol{n}(x):=n^A(x)\frac{\sigma^A}{2}=g(x)\frac{\sigma^3}{2}g(x)^\dagger. \tag{19}$$

ここで σ^A $(A=1,2,3)$ は 2 行 2 列の Pauli 行列である．以下，添え字 A が繰り返されたときには可能な値 $A=1,2,3$ について和をとる．以下，$n^A(x)$ を**カラー（方向）場**と呼ぶ．$f_{\mu\nu}(x)$ は $SU(2)$ ゲージ場 $\mathscr{A}_\mu(x)=\mathscr{A}_\mu^A(x)\frac{1}{2}\sigma^A$ とカラー場を用いて定義された 2 階反対称テンソル場である：

$$f_{\mu\nu}(x)=\partial_\mu\left[\mathscr{A}_\nu^A(x)n^A(x)\right]-\partial_\nu\left[\mathscr{A}_\mu^A(x)n^A(x)\right]-g_{\rm YM}^{-1}\epsilon^{ABC}n^A(x)\partial_\mu n^B(x)\partial_\nu n^C(x). \tag{20}$$

ここで，ϵ^{ABC} は Levi-Civita 記号で $\epsilon^{ABC}=\pm1,0$ の値をとる．$[d\mu(\boldsymbol{n})]_\Sigma$ は，面 Σ 上のすべての点に渡る $SU(2)/U(1)$ 上の不変測度 $d\mu(\boldsymbol{n}(x))$ の積である：

$$[d\mu(\boldsymbol{n})]_\Sigma=\prod_{x\in\Sigma}d\mu\left(\boldsymbol{n}(x)\right). \tag{21}$$

$n^A(x)$ は 3 成分を持つが，$n^A(x)n^A(x)=1$ の拘束条件に従うために独立な成分は 2 つしかない．これは $SU(2)/U(1)$ の次元と等しい．この時点で，$f_{\mu\nu}$ は可換な量であるので，$U(1)$ のときと同様にして，

$$W_C[\mathscr{A}]=\int[d\mu(\boldsymbol{n})]_\Sigma\exp\left\{i\frac{1}{2}g_{\rm YM}(\Xi_\Sigma,k)+i\frac{1}{2}g_{\rm YM}(N_\Sigma,j)\right\} \tag{22}$$

の形に変形できる．k と j は (20) を用いて定義される：

$$k=\delta^*f=*df,\quad j=\delta f. \tag{23}$$

$SU(2)$ ゲージ場 $\mathscr{A}_\mu(x)$ のゲージ変換 $\mathscr{A}_\mu(x)\to\mathscr{A}'_\mu(x)$,

$$\mathscr{A}'_\mu(x)=U(x)\mathscr{A}_\mu(x)U^\dagger(x)+ig_{\rm YM}^{-1}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x) \tag{24}$$

に対して，不変測度の性質から変換

$$g(x) \to U(x)g(x), \quad g^\dagger \to g^\dagger(x)U^\dagger(x) \qquad (25)$$

が許されるので，これに伴う場 $\boldsymbol{n}(x)$ の変換

$$\boldsymbol{n}(x) \to U(x)\boldsymbol{n}(x)U^\dagger(x) \qquad (26)$$

を加味すると，$f_{\mu\nu}(x)$ は元の $SU(2)$ ゲージ変換で不変であることがわかる：$f_{\mu\nu}(x) \to f'_{\mu\nu}(x) = f_{\mu\nu}(x)$．こうして定義された $f_{\mu\nu}$ は，自然に Bianchi 恒等式を破り，$k \neq 0$ を導く．このように，ゲージ不変な Wilson ループ演算子はその中にゲージ不変なカラーモノポールを内包しているため，それを検出するプローブとして用いることができ，その閉じ込めへの寄与を評価できる．こうやって定義されたカラーモノポールは，ゲージ不変なのでカラー無色であることに注意．

しかも，こうして定義したカラーモノポールは，磁荷 $g_m = \int d^3xk_0$ に対する **Dirac の量子化条件**

$$q_m = \frac{4\pi}{g_{\rm YM}}n \ \ , \ \ n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \dots\} \qquad (27)$$

を満たすことが，簡単に導ける[9]．特に，$\Xi_\Sigma(x)$ は，3 次元では，点 x から Σ を望む立体角と一致し，4 次元では，その拡張になっている．モノポールは余次元 3 のトポロジカルオブジェクトで k は $(D-3)$-微分形式，つまり，$D=4$ でベクトル場

$$k^\mu(x) = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu f_{\rho\sigma}(x) = \partial^*_\nu f^{\mu\nu}, \qquad (28)$$

$D=3$ でスカラー場

$$k(x) = \frac{1}{2}\epsilon^{jkl}\partial_j f_{kl}(x) = \partial^*_j f^j, \qquad (29)$$

と表される．次元 $D=3$ では点状のモノポール（Wu–Yang タイプ），次元 $D=4$ では，保存則 $\partial_\mu k^\mu = 0$ からその世界線が閉じたループ C' になる．4 次元でのカラーモノポールの Wilson ループへの寄与は，ループ C を境界とする 2 次元面 Σ とモノポールループ C' を境界とする 2 次元面 Σ' の交差点として原理的に評価できる[11]．この Σ' をボルテックス（vortex）と呼ぶ．

興味深いことに，カラー場 $n^A(x)$ を（規格化した）Higgs 場 $\hat{\phi}^A(x)$ に置換えると，$f_{\mu\nu}$ の表式は，'t Hooft–Polyakov のモノポールと完全に一致している．QCD では，基本場として Higgs 場は存在しないが，ゲージの自由度が，その代わりを果たす．たとえ，元の $\mathscr{A}_\mu(x)$ に Dirac モノポールのような特異性がなくても，ゲージ群の場 $U(x)$ の大域的な振舞いがトポロジカルに非自明であればモノポールが生じる．実際，$U(x)$ でゲージ変換した $\mathscr{A}'_\mu(x)$ の一部分 $\Omega_\mu(x) := ig_{\rm YM}^{-1}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x)$ の対角部分には，Dirac モノポールを導く特異ポテンシャルが再現される[12]．無限小ゲージ変換では，群の単位元近傍に限られトポロジーは自明で，$q_m = 0$ となってしまうために，モノポールを得るには群のパラメータ空間全体を考察することが必要である[8]．

Higgs 場のない Yang–Mills 理論や QCD においてモノポールを定義する方法として，1981 年に 't Hooft によって提唱された**可換射影**の方法は，非可換ゲージ群 $G = SU(2)$ をその最大トーラス部分群 $H = U(1)$ にあらわに破る方法である[13]．**最大可換ゲージ**で，可換射影された Wilson ループ期待値が面積則を（クォークポテンシャルが線形ポテンシャルを）示し，その弦定数は元の非可換ゲージ理論のそれを再現することが，1990 年代に入って示され，多くの仕事がなされた．

この帰結は，既に述べた考察から容易に理解できる．可換射影は，カラー場 $n^A(x)$ を x に依存しない一様な場 $\boldsymbol{n}_\infty$ に（ゲージ）固定した場合に相当する：

$$n^A(x) \equiv n^A_\infty \equiv \delta^{A3}. \qquad (30)$$

実際，うまくゲージ変換を選んで，変換されたカラー場 $\boldsymbol{n}'(x) = U(x)\boldsymbol{n}(x)U^\dagger(x)$ が $\boldsymbol{n}'(x) = \boldsymbol{n}_\infty$ となるようにできる．この場合にはカラー場 $\boldsymbol{n}'(x)$ からは特異点は生じないので，特異性が生じるとすれば $\mathscr{A}'_\mu(x)$ のほうであるが既に述べたように $\Omega_\mu(x)$ の可換部分（対角成分）に Dirac モノポールと類似した構造が現れる．上の $f_{\mu\nu}(x)$ はゲージ不変なので，こうして求めたモノポールのゲージ不変な量への寄与は，今の特殊なゲージの選択に依っていない．可換射影を用いた研究はゲージ不変性を保証できないために，その帰結には強い批判を招いたが，結果的には $SU(2)$ に関しては正しいことが示された．最大可換ゲージと呼ばれる特別なゲージを採用していたために，ゲージ不変性の全体像が見えなかったにすぎない．

しかし，この一致は，$SU(2)$ 以外では言えない．ごく最近このような考察が $SU(3)$ に拡張された[9,14]．その結果 $SU(3)$ の Wilson ループ演算子から定義されるゲージ不変なカラーモノポールは，$SU(3)$ の最大トーラス部分解 $U(1) \times U(1)$ に対応した 2 種類の可換モノポールとは異なる**非可換モノポール**で，$SU(3)$ を $U(2)$ に破った場合に相当するカラー場が，$SU(3)/U(2)$ の独立自由度を担うミニマルな場合であることが明らか

になった．この可能性は，1999 年には指摘されていた[15)]．我々は，カラー場の導入を出発点としてクォーク閉じ込めに効く自由度をゲージ不変に抽出できる新しい場の変数を用いる Yang–Mills 理論の再定式化を完成させた．さらに，この定式化を格子ゲージ理論に移植し[16)]，それに基づく数値シミュレーションを可能にした．実際に数値シミュレーションを遂行した結果，上述の非可換モノポールの寄与から線形ポテンシャルが導出され，その弦定数は，元々のそれを再現することが示された[17)]．また，カラー電束を測って，双対 Meissner 効果を検証し，カラー磁流 k^μ の生成も確認した．$SU(3)$ 双対超伝導は，I 型と II 型の境界にある $SU(2)$ の場合と異なり，I 型であることが判明した[18)]．これらの帰結のハドロン物理現象への適用が今後に残された課題である．

参考文献

1) C. Yang and R. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954).
2) 近藤慶一，『ゲージ場の量子論入門—質量ギャップとクォーク閉じ込めの解決に向けて（電子版）—』，SDB Digital Books 3（サイエンス社，2013 年）
3) K.G. Wilson, *Phys. Rev. D*10, 2445 (1974).
4) G.S. Bali, *Phys. Rept.* **343**, 1 (2001).
5) Y. Nambu, *Phys. Rev. D*10, 4262 (1974); G. 't Hooft, in: *High Energy Physics*, edited by A. Zichichi (Editorice Compositori, Bologna, 1975); S. Mandelstam, *Phys. Report* **23**, 245 (1976); S. Mandelstam, *Phys. Lett. B*53, 476 (1975).
6) P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London, A*133, 60 (1931).
7) G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B*79, 276 (1974); A.M. Polyakov, *JETP Lett.* **20**, 194 (1974).
8) J. Arafune, P.G.O. Freund, and C.J. Goebel, *J. Math. Phys.* **16**, 433 (1975).
9) K.-I. Kondo, *Phys. Rev. D* **77**, 085029 (2008).
10) K.-I. Kondo, *Phys. Rev. D* **58**, 105016 (1998).
11) K.-I. Kondo, *J. Phys. G*35, 085001 (2008).
12) K.-I. Kondo, *Phys. Rev. D*58, 105019 (1998).
13) G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B*190, 455 (1981).
14) K.-I. Kondo, T. Shinohara and T. Murakami, *Prog. Theor. Phys.* **120**, 1 (2008).
15) K.-I. Kondo and Y. Taira, *Prog. Theor. Phys.* **104**, 1189 (2000).
16) K.-I. Kondo, A. Shibata, T. Shinohara, T. Murakami, S. Kato and S. Ito, *Phys. Lett. B*669, 107 (2008); A. Shibata, K.-I. Kondo and T. Shinohara, *Phys. Lett. B*691, 91 (2010).
17) K.-I. Kondo, A. Shibata, T. Shinohara, and S. Kato, *Phys. Rev. D*83, 114016 (2011).
18) A. Shibata, K.-I. Kondo, S. Kato and T. Shinohara, *Phys. Rev. D*87, 054011 (2013).

（こんどう・けいいち，千葉大学大学院理学研究科）

モノポールの数理とDブレーン

浜中　真志

1. はじめに

弦理論のソリトン解としてのDブレーンの発見は，弦理論の非摂動論的側面の研究を可能にしただけでなく，重力理論と場の理論の架け橋として多くの目覚ましい対応関係を我々に提示した．超弦理論は10次元時空で定義される一方で，現実の世界は4次元として認識されている以上，超弦理論から如何にして4次元を引き出すかというのは，非常に重要な問題である．昔はそのために余分な6次元をコンパクト化するのが主なアプローチであったが，Dブレーンの種々の配置からさまざまな場の理論を再現することが可能になり，可能性が大きく広がった．

Dブレーン上の場の理論は既知の結果，特に非摂動論的側面を見事に説明し，多くの新しい知見をもたらした．一方Dブレーンは開弦の境界として定義されているため，開弦の摂動論的扱いからその力学や性質を理解することも可能である．特に，超対称性が部分的に保たれたBPS状態の系に対しては，BPSソリトンに関わる場の理論の厳密な取扱いをDブレーンの解析に応用することが可能である．

この記事では，Bogomolny方程式の有限エネルギー解であるBPS*1)モノポールについて解説する*2)．特にモノポールのNahm構成法とDブレーン解釈に焦点をあてる．**Nahm構成法**は，モノポールのモジュライ空間とNahmデータのモジュライ空間との間の1対1対応（双対性）を利用したもので，解構成を含めさまざまな応用がある．Nahmデータは常微分方程式の解であり双対変換も常微分方程式であるため，3次元偏微分方程式であるBogomolny方程式の解が，常微分方程式を解くことで得られる．

Nahm構成法に現れるFourier変換的な双対性は4次元トーラス上のインスタントンに関わる美しい双対性としてSchenk, Braam-van Baalによって抽出された．この双対関係を与える変換を**Nahm変換**と呼ぶ*3)．Nahm構成法における双対性の証明は，最初はHitchinによってスペクトル曲線を経由して間接的に与えられたが，Nahm変換的な見方から直接の証明を与えることもできる[14]．

本記事では，まずNahm変換の紹介を行い，ある極限からモノポールのNahm構成法を「導出」する．次いで，弦理論のDブレーンを用いて双対性の起源を明らかにする．モノポールのBPS条件は，Dブレーン上のゲージ理論からは超対称性を部分的に保つBPS条件として記述され，さまざまなDブレーンの性質とモノポールの性質との対応が非常に明快に与えられる．最後に最近の話題について少し触れる*4)．

2. Nahm変換からの準備

Nahm変換は4次元トーラスT^4上の$G=U(N)$, kインスタントンを双対トーラス$\widehat{T}^4$上の$\widehat{G}=U(k)$, Nインスタントンにうつす変換であり，両者のモジュライ空間は1対1に対応する：

$$\begin{array}{ccc} G=U(N) & & \widehat{G}=U(k) \\ k\text{インスタントン } A_\mu & \overset{1\text{対}1}{\longleftrightarrow} & N\text{インスタントン } \widehat{A}_\mu \\ \text{on } T^4 & & \text{on } \widehat{T}^4 \end{array}$$

*1)　Bogomolny–Prasad–Sommerfieldの略．

*2)　以後「モノポール」は「BPSモノポール」を指す．

*3)　Fourier–Mukai変換の「微分幾何版」である．

*4)　紙数の制約のため説明や参考文献をかなり省略した．Dブレーンの簡単な解説として7)がある．本記事に関連した総合報告として10,16)がある（参考文献については恐れ入りますがそちらをご参照ください）．

1 対 1 対応を与える双対変換はインスタントン背景での零質量 Dirac 方程式を経由して与えられる．4 次元トーラス T^4 の座標を x^μ，双対 4 次元トーラス $\widehat{T}^4$ の座標を ξ_μ とおき，双対 4 次元トーラス上のインスタントン $\widehat{A}_\mu$ から 4 次元トーラス上のインスタントン A_μ を与える手順を説明する．

- **手順 (i)**：双対 4 次元トーラス上の反自己双対 Yang–Mills 方程式

$$\widehat{F}_{\mu\nu} = -(*\widehat{F})_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

をインスタントン数（＝第 2 Chern 数 $C_2 = (1/8\pi^2) \int d^4\xi \mathrm{Tr}\widehat{F} \wedge \widehat{F}$ の絶対値）が N となるように解く．$*$ は Hodge 作用素であり $(*X)_{\mu\nu} := (1/2)\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}X^{\rho\sigma}$ で定義される．

- **手順 (ii)**：(i) で得られた双対インスタントン $\widehat{A}_\mu$（$k \times k$ の反エルミート行列）の背景の下，次のような（零質量）Dirac 方程式を解く*5)：

$$\widehat{\mathcal{D}}^\dagger v = 0, \tag{2}$$

ただし Dirac 作用素は以下で与えられる：

$$\widehat{\mathcal{D}} := e_\mu \otimes \left(\frac{\partial}{\partial \xi_\mu} + \widehat{A}^\mu - ix^\mu \right). \tag{3}$$

ここで $e_\mu := (-\mathrm{i}\sigma_i, 1_{2\times2})$（$\sigma_i$ は Pauli 行列）．$\partial/\partial\xi_\mu$，x^μ のそばには $k \times k$ 単位行列が略記されている．族の指数定理の結果より，規格化可能な解は背景インスタントン数と同じ N 個だけ存在する．これを列にならべて v を $2N \times k$ 行列とする．

- **手順 (iii)**：(ii) で得られた Dirac 零モード $v(\xi, x)$ を用いて 4 次元トーラス上のゲージ場が以下のように得られる：

$$A_\mu(x) = \int_{\widehat{T}^4} d^4\xi \; v^\dagger \frac{\partial}{\partial x^\mu} v. \tag{4}$$

v が独立に N 個あったため，A_μ は $N \times N$（の反エルミート行列）であり，反自己双対 Yang–Mills 方程式を自動的に満たす．インスタントン数も k であることが分かる．

逆変換も全く同様であり 1 対 1 対応が厳密に示される．

さて，4 次元トーラスは 4 つの S^1 の直積であり，半径が R の S_1 を S^1_R と明示して $T^4 = S^1_{R_1} \times S^1_{R_2} \times S^1_{R_3} \times S^1_{R_4}$ と書き表してみる．このとき双対トーラスは半径が逆であり，$\widehat{T}^4 = S^1_{1/R_1} \times S^1_{1/R_2} \times S^1_{1/R_3} \times S^1_{1/R_4}$ である．ここでトーラスの半径という 4 つのパラメータ R_μ をある極限に飛ばして，この美しい双対性の極限を見てみよう．

まず，トーラスの半径を 3 つだけ無限大（$R_{1,2,3} \to \infty$），残り 1 つをゼロ（$R_4 \to 0$）にしよう．このとき双対トーラスの半径は，3 つはゼロ，1 つは無限大になる．したがって双対トーラスは直線になり，双対トーラス上の自己双対方程式および（双対）Dirac 方程式の中の 3 つの方向の微分は落ち，1 つの方向の微分だけが残る．その結果，1 次元反自己双対 Yang–Mills 方程式（Nahm 方程式）と 1 次元（双対）Dirac 方程式（ともに常微分方程式）を解くことで，$\mathbb{R}^3$ 上のインスタントン（＝ BPS モノポール）が得られる．これが Nahm 構成法である．

なお，トーラスの半径を 4 つともすべて無限大にすると，同様の考察から，0 次元の方程式（行列の方程式）を解くことで $\mathbb{R}^4$ 上のインスタントンが得られる．これが **ADHM**[*6] **構成法**[1] である．同様に，トーラスの半径を 2 つだけ無限大，残り 2 つをゼロにすると，Hitchin 系に関する構成法が得られる．ただし，以上の考察は素朴なものであり，ADHM/Nahm 構成法のすべての構成要素がそのまま導出されるわけではない[4, 10, 15]．

■ 3. $SU(2)$ モノポールの Nahm 構成法 ■

さていよいよ，$SU(2)$，k モノポールの Nahm 構成法を紹介しよう．素朴には，前節で議論した通り，「3 次元反自己双対 Yang–Mills 方程式」の解（モノポール）のモジュライと「1 次元反自己双対 Yang–Mills 方程式」の解（Nahm データ）のモジュライとの間の 1 対 1 対応を基にしたものである．モノポール数に応じて境界条件が必要である．

モノポールとは，4 次元反自己双対 Yang–Mills 方程式を 3 次元に次元還元した次の方程式（Bogomolny 方程式）の解 A_i, Φ である（$\Phi \equiv -\mathrm{i}A_4$）：

$$[D_i, \Phi] = -B_i. \tag{5}$$

ここで $B_i := (\mathrm{i}/2)\epsilon_{ijk}F^{jk}$ は磁場である．境界条件として，Higgs 場の無限遠での振舞いが（ゲージ変換の自由度を除いて）次のようになればよい：

$$\Phi = \left(\frac{a}{2} - \frac{k}{2r} \right) \sigma_3 + \mathcal{O}(r^{-2}). \tag{6}$$

ここで現れた整数 k がモノポール数を与える．

*5) 正確には「Weyl 方程式」と呼ぶべきであるが，ここでは慣習に従う．

*6) Atiyah–Drinfeld–Hitchin–Manin の略．

Nahm データとは 4 次元反自己双対 Yang–Mills 方程式を 1 次元に次元還元した次の方程式（Nahm 方程式）の解 T_i（$k\times k$ エルミート行列）である（$T_i \equiv \mathrm{i}\widehat{A}_i$）：

$$\frac{dT_i}{d\xi} = \frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon_{ijl}[T_j, T_l] \quad (i,j,l = 1,2,3). \qquad (7)$$

いま T_i は Higgs 場であり，ゲージ場 $\widehat{A}_4$ については $\widehat{A}_4 = 0$ のゲージを取った．また，ξ は有限区間 $[-a/2, a/2]$ の座標である（なぜ有限区間になるのかは 7 節で再考）．$T_i(\xi)$ の満たすべき境界条件は以下の通り：

$$T_i(\xi) \xrightarrow{\xi\to\pm a/2} \frac{\tau_i}{\xi \mp \frac{a}{2}} + b_i + \mathcal{O}(\xi), \qquad (8)$$

ただし b_i は定数行列，τ_i は $su(2)$ の k 次元既約表現：$[\tau_i, \tau_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijl}\tau_l$．

与えられた Nahm データからモノポール解を構成する手順は Nahm 変換のときと同様である．一番代表的な Prasad–Sommerfield モノポール解（$G = SU(2), k=1$）を構成してみよう．

- **手順 (i)**：Nahm 方程式 (7) を解く．$k=1$ のとき，境界条件 (8) の 1 位の極の部分は自明となり，Nahm 方程式の解としては以下の自明解が取れる：

$$T_i = b_i \quad (\text{任意の実数}). \qquad (9)$$

b_i は実はモノポールの位置を表す．簡単のため $b_i = 0$ とする（＝モノポールを原点に置く）．

- **手順 (ii)**：次にこの解の背景の下「1 次元 Dirac 方程式」を解く：

$$\widehat{\mathcal{D}}^\dagger v = 0, \qquad \int d\xi\ v^\dagger v = 1_{2\times 2}, \qquad (10)$$

$$\widehat{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} \partial_\xi + x^3 & x^1 - \mathrm{i}x^2 \\ x^1 + \mathrm{i}x^2 & \partial_\xi - x^3 \end{pmatrix}.$$

これを解くため v を次の形に取る：

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}(x)}}\begin{pmatrix} -(x_1 - \mathrm{i}x_2) \\ \partial_\xi + x^3 \end{pmatrix}\beta. \qquad (11)$$

このとき β についての微分方程式は $\partial_\xi^2\beta = r^2\beta$ となり，$\beta = \mathrm{e}^{\pm r\xi}$ と求まる．規格化因子 $\mathcal{N}$ は規格化条件より $\mathcal{N} = 2(r \pm x^3)\sinh ra$ と簡単に求まる．このことは独立解が 2 個あることを示しており，ゲージ場は 2×2 となる．

- **手順 (iii)**：Higgs 場，ゲージ場は以下のように構成される：

$$\varPhi = \int d\xi\ v^\dagger \xi v, \quad A_i = \int d\xi\ v^\dagger \partial_i v \qquad (12)$$

（Higgs 場の積分の中の x 微分が ξ の掛け算に置き換わっていることに注意）．(2) から構成される Higgs 場は実際に境界条件 (6) を満たしている：

$$\varPhi = \left(\frac{a}{2}\frac{1}{\tanh ar} - \frac{1}{2r}\right)\sigma_3. \qquad (13)$$

これはゲージ変換の自由度を除いて Prasad–Sommerfield モノポールに一致する[*7)]：

$$\varPhi = \frac{x^i\sigma_i}{2r^2}\left(\frac{ar}{\tanh ar} - 1\right),$$

$$A_i = \frac{\epsilon_{ijk}\sigma^j x^k}{2r^2}\left(\frac{ar}{\sinh ar} - 1\right).$$

なお，積分区間を $\xi \in (-\infty, 0]$ ととると 2 つの独立解のうち $\mathrm{e}^{-r\xi}$ のほうは規格化できなくなり，構成された解は $G = U(1)$ の Dirac モノポールに一致する：

$$\varPhi = -\frac{1}{2r}, \quad A_r = A_\vartheta = 0, \quad A_\varphi = -\frac{\mathrm{i}}{2r}\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

ただし (r, ϑ, φ) は普通の極座標である．

■　4. D ブレーンの低エネルギー有効作用　■

D*p* ブレーンは開弦の境界条件として定義される $(p+1)$ 次元の超平面である．平坦な時空上で $x^0, x^1, \cdots, x^p$ 方向にまっすぐに広がっている Dp ブレーンを以下のように書き表す．

	x^0	x^1	$\cdots$	x^p	x^{p+1}	$\cdots$	x^9
Dp	○	○	$\cdots$	○			

開弦の端点に対して，$x^0, x^1, \cdots, x^p$ 方向に自由端条件（Neumann 境界条件）が課されており，$x^{p+1}, \cdots, x^9$ 方向に固定端条件（Dirichlet 境界条件）が課されている．したがって Dp ブレーンには開弦が端を持つ．（上の表で，○が Neumann 境界条件に，無印が Dirichlet 境界条件に相当する．図 1 も参照）開弦には Chan–Paton 因子（カラーの足）が付随しており，Dp ブレーンの有効理論はゲージ対称性を持つ．

1995 年に Polchinski は Dp ブレーンが単なる境界ではなく Ramond–Ramond チャージを持った弦理論のソリトンであることを示した．平坦な時空上に Dp

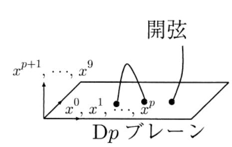


図 1　Dp ブレーン．

*7)　v として最も自然な形：$v \propto \exp(-x^i\sigma_i\xi)$ を採用すると，この解が直接導かれる．

ブレーンを N 枚置いたとき，D ブレーンの低エネルギー有効作用は次の形の $(p+1)$ 次元 $G=U(N)$ 超対称 Yang–Mills 理論となる（係数など適宜省略している）：

$$S_{\mathrm{D}p}=\int d^{p+1}x\ (L_{\mathrm{B}}+L_{\mathrm{F}}+L_{\mathrm{WZ}}), \tag{14}$$

$$L_{\mathrm{B}}=\mathrm{Tr}\left(-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-2(D_\mu\Phi^M)^2+[\Phi^M,\Phi^N]^2\right)$$

$$(\mu,\nu=0,1,2,\cdots,p,\quad M,N=p+1,\cdots,9).$$

Φ^M のポテンシャル項をゼロとするには，Φ^M が対角行列となればよいが，この対角成分は N 枚の Dp ブレーンの位置と解釈できる．これは以下のように説明できる．Dp ブレーンが 2 枚ある状況を考えよう．Φ^M のある 1 成分だけが非ゼロであるとし，以下のように表されたとする：

$$\Phi=\begin{pmatrix}\Phi^{(1)} & 0\\ 0 & \Phi^{(2)}\end{pmatrix},\quad A_\mu=\begin{pmatrix}A_\mu^{11} & A_\mu^{12}\\ A_\mu^{21} & A_\mu^{22}\end{pmatrix}.$$

上記ラグランジアンの中で A_μ^{12} の質量項は以下の部分から計算される：

$$\mathrm{Tr}[A_\mu,\Phi][A_\mu,\Phi]=2(\Phi^{(1)}-\Phi^{(2)})^2A_\mu^{12}A_\mu^{21}.$$

A_μ^{12} は 2 枚の Dp ブレーンを結ぶ開弦から生じた場であるが，その質量は開弦の長さに比例することが知られており，$\Phi^{(1)},\Phi^{(2)}$ を 2 枚の Dp ブレーンの位置と解釈することでつじつまが合う（図 2）．

次に **T 双対変換**について簡単に紹介する．時空の x^μ 方向が S^1_R となっているとき，その方向への T 双対変換 T_μ はトーラスの半径と境界条件を入れ替える変換である：$R\leftrightarrow 1/R$,（開弦の Dirichlet 境界条件）$\leftrightarrow$（開弦の Neumann 境界条件）．境界条件の変換より以下のことが分かる．

- Dp ブレーンが広がっていない方向へ T 双対変換：
  Dp ブレーン $\longrightarrow$ D$(p+1)$ ブレーン．
- Dp ブレーンが広がっている方向へ T 双対変換：
  Dp ブレーン $\longrightarrow$ D$(p-1)$ ブレーン．

例えば，4 次元トーラス $T^4=S^1_{R_1}\times S^1_{R_2}\times S^1_{R_3}\times S^1_{R_4}$ に巻き付いた N 枚の D4 ブレーンに k 個の D0 ブレーンが乗っている（溶け込んでいる）系を考えよう（下表 (I) の状況）．各 $S^1_{R_\mu}$ 方向に T 双対変換 T_μ を施していくと，この D ブレーン複合系は以下のように (I) $\to\cdots\to$ (V) と変換されていく．

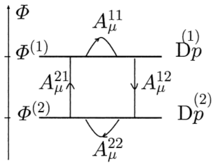


図 2　Higgs 場の物理的意味．

(I)	R_1	R_2	R_3	R_4
k D0				
N D4	○	○	○	○

$\updownarrow T_4$

(II)	R_1	R_2	R_3	$1/R_4$
k D1				○
N D3	○	○	○	

$\updownarrow T_3$

⋮

$\updownarrow T_1$

(V)	$1/R_1$	$1/R_2$	$1/R_3$	$1/R_4$
k D4	○	○	○	○
N D0				

■　5. Nahm 変換の D ブレーン解釈　■

以上の準備の下，まず Nahm 変換に現れた双対性の起源を前述の ND4-kD0 ブレーン系を用いて説明しよう．

最初に状況 (I) を考える．これは $G=U(N)$, k インスタントンの状況を記述することが次のようにして分かる．まず，この D0-D4 ブレーン系は BPS 状態であることが弦理論の計算より分かっており，保たれている超対称性の数は 8 である（4 次元 $\mathcal{N}=2$ の理論に相当）．一方，ND4 ブレーンの有効理論（$G=U(N)$）の超対称性の数は 16 であり，BPS 条件はこの超対称性が半分になる条件と等価である．この理論のゲージーノの超対称変換は以下のようになる：$\delta\psi^\alpha=\zeta^\alpha\Gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}=\zeta^\alpha\mathrm{diag}\,(\eta^{\mu\nu}_{\mathrm{SD}}F_{\mu\nu},\eta^{\mu\nu}_{\mathrm{ASD}}F_{\mu\nu})$．記号について詳しい説明はしないが，$\zeta^\alpha$ は 16 個の超対称性に対応する 16 成分のスピナー，$\eta^{\mu\nu}_{\mathrm{(A)SD}}$ は 't Hooft の（反）自己双対シンボルである．したがって $F_{\mu\nu}$ が（反）自己双対であれば，'t Hooft シンボルとの縮約がどちらか片方でゼロとなり，8 個の超対称性が保たれることが分かる．したがって，（反）自己双対 Yang–Mills 方程式は D4 ブレーンから記述したこの系の BPS 条件である．また，D0 ブレーンは D4 ブレーンから見て 4 次元中の 1 点であり，有効作用の中の位相的な項 L_{WZ} を考慮

するとインスタントンと解釈できることが分かる（ここでは説明を省略する）．

この系に対してD4ブレーンが広がっている方向に4回T双対変換を取ると，双対トーラスに巻き付いたk枚のD4ブレーンにN個のD0ブレーンが乗っている系に変わる（状況(V)）．これは$G=U(k)$，Nインスタントンの状況であり，まさにNahm変換そのものである．ゲージ群のランクとインスタントン数が入れ替わる美しい数学的双対性の起源が，弦理論のT双対性からきわめて簡単に理解された．

6. モノポールのDブレーン解釈

次に$SU(2)$，kモノポールのDブレーン解釈を議論しよう．Nahm構成法のDブレーン解釈[6]はD1-D3ブレーン複合系である（図3）（D1ブレーンがk本，D3ブレーンが2枚で，$G=SU(2)$，kモノポールの状況となる）．素朴にはkD0-2D4ブレーン系をx^4方向にT双対変換したkD1-2D3ブレーン系と考えてよい．ただしD1ブレーンはD3ブレーンに挟まれた有限領域にのみ存在し，その結果D1ブレーンに沿った座標ξも有限領域にのみ定義される（次節参照）．

D1ブレーン上の理論におけるヒッグス場をT_i，ゲージ場を$\widehat{A}_4$とおき，D3ブレーン上の理論におけるゲージ場をA_i，Higgs場をΦとおく．D1ブレーンおよびD3ブレーン超対称理論のゲージーノの変換式からBPS条件を読み取ることができるが，インスタントンのときの反自己双対Yang–Mills方程式を次元還元した形に等しく，それぞれNahm方程式およびBogomolny方程式に完全に一致する．考えている物理系は全く同じBPS配位の系であり，その条件をどちらのDブレーンから記述したかの違いに過ぎない．モジュライ空間の等価性は「見方の違い双対性」として簡明に理解される．

さらに境界条件のDブレーン解釈について考える．まずD3ブレーンから考える．Higgs場Φの値は（対

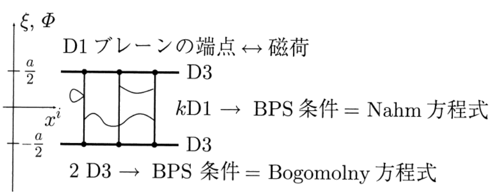


図3　Nahm構成法のDブレーン解釈．

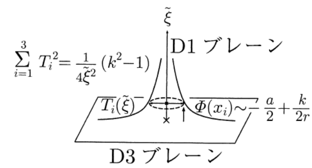


図4　境界条件のDブレーン解釈．

角化したときの対角成分が）D3ブレーンの位置を表す．$SU(2)$モノポールの境界条件(6)は，D3ブレーンがD1ブレーンに引っ張られて漏斗状になったことを表していると考えられる．一方D1ブレーンにおいては，T_iがD1ブレーンの位置を表す．しかし$k>1$のときT_iは同時対角化できないため，D1ブレーンの位置は明確に定まらない．ただ2次のCasimirの条件式として$\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2=(k^2-1)/4$が成り立つので，

$$T_1^2+T_2^2+T_3^2 \xrightarrow{\xi\to\pm a/2} \frac{1}{4\tilde{\xi}^2}(k^2-1) \tag{15}$$

が分かる（$\tilde{\xi}:=\xi\mp a/2$）．つまりD1ブレーンはこのようにD3ブレーンに端を持つ状況では球面状に広がっていると解釈できる（図4）．

複数のDブレーンが背景のRamond–Ramondフラックスの影響で球面状に広がる現象はMyers効果として知られている．このようなDブレーンの性質が，Nahm構成法の境界条件という数学的条件の中に隠れていたということである．

7. インスタントンとの関係

最後に，モノポールとインスタントンを補間するカロロンについて議論する．**カロロン**とは$\mathbb{R}^3\times S_R^1$上のインスタントン解のことで，半径$R\to\infty$と$R\to 0$の極限でそれぞれインスタントンとモノポールに帰着する．これもDブレーンを用いて明快に説明することができる[16]．$G=SU(2)$，1カロロン解のDブレーン解釈は図5で与えられる．

このときインスタントンのサイズρとS_R^1の半径R，および$\xi=\pm a/2$でのD1ブレーンの「飛び」Dとは$D\sim\rho^2/R$の関係がある[11]．$R\to\infty$でインスタントンに一致するのは自明であるが，$R\to 0$でモノポールに一致するのは，一度T双対変換を取ってから見ると容易に理解できる（図5）．なお，このときDは無限大となるため，後ろ側のD1ブレーンは無限遠に消えてしまった．このため手前に残った有限区間にのびるD1ブレーンが$SU(2)$モノポールを記述する

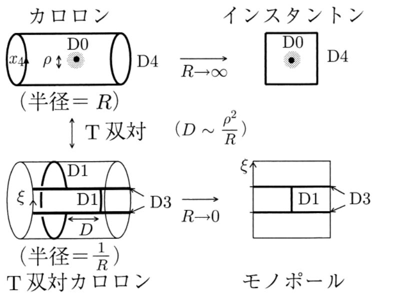


図5　$SU(2)$ 1 カロロンの D ブレーン解釈.

のである.

カロロンは有限温度の場の理論での非摂動効果の解明に向けてさまざまな研究がなされてきたが[9]，この D ブレーン系の T 双対として現れる 2 モノポールの寄与としてグルーイノ凝縮を計算する試みもなされている[5]．$N\geq 3$ の場合の $SU(N)$ モノポール・カロロンの Nahm 構成法は，Nahm 方程式も境界条件も複雑になり，場の理論側だけで理解しようと思うと困難が伴うが，D ブレーンを援用すれば比較的簡単に理解できる[15,16]．

8. おわりに

以上，モノポールを題材として，場の理論の厳密な結果と D ブレーンによる解釈について基本的な内容を紹介した．さまざまな BPS 配位の D ブレーン系を考えることで，モジュライ空間の等価性といった非自明な結果に対して明快な説明が与えられ，また逆に，場の理論の結果から D ブレーンの性質に対する示唆を得ることもできた．

5 節，7 節で議論したように，1 つの BPS D ブレーン系を T 双対変換でさまざまな状況に変換していくことができる．弦理論には他にも S 双対変換といったさまざまな双対性が備わっており，題材をモノポールに限っても，もっとさまざまな議論ができる．例えば，D1-D3 ブレーン系は T 双対変換で D3-D5 ブレーンにうつすことができるが，ここで S 双対変換を施すと D3-NS5 ブレーン系となる．さらに NS5 に平行かつ D3 ブレーンに垂直な方向に T 双対変換を施して得られた D4-NS5 ブレーン系を M 理論に持ち上げることで，モノポールの（1 節で触れた）スペクトル曲線が記述される．また，モノポールの住んでいる空間に周期性を課してその方向に T 双対変換を施すことで，D2-D2 ブレーン系（Hitchin 系）との関係を議論したり[2]，また 2 方向周期的にとり T 双対変換や S 双対変換などを繰り返していくことで M 理論への持ち上げも含めた双対関係のウェブ図を描くことができる．スペクトル曲線に付随した Newton 多角形からモジュライの構造を調べたり，周期方向のトーラス T^2 に複素構造を導入してモジュラー変換性との関連を調べるなど，さまざまな興味深い議論がなされている[3]．モノポールの記述には Donaldson の有理写像がしばしば有用であるが[12]，この弦理論的解釈は存在するのだろうか？

BPS の D ブレーン配位は他にも無数に存在し，数学上未知の双対関係を発見したり D ブレーンの力学・性質について新しい知見を得るといった研究の余地はまだまだ十分に残っているように思われる[8]．数学と弦理論との相補的発展が今後も続いていくことを大いに期待する．

参考文献

1) M.F. Atiyah, N.J. Hitchin, V.G. Drinfeld and Y.I. Manin, *Phys. Lett. A* **65** (1978) 185.
2) S.A. Cherkis and A. Kapustin, *Commun. Math. Phys.* **218**, 333 (2001); id., *Commun. Math. Phys.* **234**, 1 (2003).
3) S.A. Cherkis and R.S. Ward, *JHEP* **1205**, 090 (2012).
4) E. Corrigan and P. Goddard, *Ann. Phys.* **154** (1984) 253.
5) M.N. Davis, 博士論文（Durham 大学，2000）.
6) D. Diaconescu, *Nucl. Phys. B* **503** (1997) 220.
7) 江口徹，今村洋介，『素粒子の超弦理論』，（岩波書店，2005）；橋本幸士，『D ブレーン』，（東京大学出版会，2006）.
8) M. Eto, Y. Isozumi, M. Nitta, K. Ohashi and N. Sakai, *J. Phys. A* **39**, R315 (2006); D. Tong, hep-th/0509216.
9) D.J. Gross, R.D. Pisarski and L.G. Yaffe, *Rev. Mod. Phys.* **53** (1981) 43.
10) 浜中真志，“ADHM/Nahm 構成法とその双対性”，素粒子論研究 **106** (2002) 1–60.
11) K. Lee and C. Lu, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 025011.
12) N.S. Manton and P. Sutcliffe, *Topological solitons*, (Cambridge UP, 2004).
13) W. Nahm, “The construction of all self-dual multimonopoles by the ADHM method”, in *Monopoles in Quantum Field Theory* (World Sci., 1982) 87.
14) H. Nakajima, *Lect. Notes in Pure and Appl. Math.* **145** (Dekker, 1993) 193.
15) T.M.W. Nye, 博士論文（Edinburgh 大学, 2001）hep-th/0311215.
16) E. Weinberg and P. Yi, *Phys. Rept.* **438** (2007) 65.

（はまなか・まさし，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

数学から見たモノポール

橋本 義武

モノポールは，トポロジー・微分幾何・表現論といった現代数学の様々な領域において今後の展開の鍵を握っている謎の存在である．本稿ではその基礎知識について解説する．

1. 波動関数の偏角の不定性

量子力学では，エネルギー E，運動量 $\boldsymbol{p}$ の自由粒子に対応する波動関数が $\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-Et)}$ の定数倍で与えられる．$\hbar$ は Planck 定数の $(2\pi)^{-1}$ 倍である．質量 m の自由粒子の波動関数 $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ は，$E=\dfrac{1}{2m}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}$ をみたす $E, \boldsymbol{p}$ に対する波動関数の重ね合わせである．これは，Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi \tag{1}$$

が成り立つということである．このとき

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\bar{\psi}(\Delta\psi)-(\Delta\bar{\psi})\psi) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\cdot\big(\bar{\psi}(\nabla\psi)-(\nabla\bar{\psi})\psi\big) \end{aligned}$$

であり，$|\psi|^2$ の時間微分がベクトル場の発散で書ける．そこで $|\psi(\boldsymbol{x}, t)|^2$ を時刻 t において位置 $\boldsymbol{x}$ に粒子が見出される確率密度と解釈する．

一方 ψ の偏角には意味がつかないので，むしろ変換 $\psi\to\mathrm{e}^{i\theta(\boldsymbol{x}, t)}\psi$ に対する不変性をもつように (1) を修正することにする．すなわち微分方程式

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^{e\boldsymbol{A}}\cdot\nabla^{e\boldsymbol{A}}\psi+e\varphi\psi, \\ -i\hbar\nabla^{e\boldsymbol{A}} &= -i\hbar\nabla-e\boldsymbol{A} \end{aligned} \tag{2}$$

を考える．$\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ をスカラー・ポテンシャル，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)=(A_1, A_2, A_3)$ をベクトル・ポテンシャル，定数 e を電荷とすると，(2) は電磁場の中の荷電粒子の Schrödinger 方程式に他ならない．(2) をみたす ψ に対しても $|\psi|^2$ の時間微分はベクトル場の発散で書ける．さらに (2) は，関数 $\lambda(\boldsymbol{x}, t)$ による変換

$$\begin{aligned} &\psi\to\mathrm{e}^{\frac{ie}{\hbar}\lambda}\psi, \\ &\varphi\to\varphi-\frac{\partial\lambda}{\partial t}, \\ &\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}+\nabla\lambda \end{aligned}$$

で不変である．これを**ゲージ変換**という．データ $(\psi, \varphi, \boldsymbol{A})$ をゲージ変換しても物理的には同等のものになると考える．

U(1) を絶対値 1 の複素数全体のなす集合とする．これは乗法に関して群となる．$P=\mathbb{R}^4\times\mathrm{U}(1)$ 上の点を $(\boldsymbol{x}, t, \mathrm{e}^{i\theta})$ で表すとき，P 上の微分形式

$$\omega=\mathrm{d}\theta+\frac{e}{\hbar}(-\varphi\,\mathrm{d}t+\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x})$$

を**接続形式**という．ゲージ変換は

$$(\boldsymbol{x}, t, \mathrm{e}^{i\theta})\to(\boldsymbol{x}, t, \mathrm{e}^{i\theta+\frac{ie}{\hbar}\lambda(\boldsymbol{x}, t)})$$

から得られる．また，

$$\mathrm{d}\omega=\frac{e}{\hbar}\left(\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}\wedge\mathrm{d}t+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)$$

を**曲率**という．これはゲージ変換で不変である．ここで，

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A},$$
$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3,\ \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1,\ \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2).$$

$\boldsymbol{E}$ は電場，$\boldsymbol{B}$ は磁場であり，$\mathrm{dd}\omega = 0$ より

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad (3)$$

が従う．これは Maxwell 方程式のうちの半分である．第 1 式は Faraday の電磁誘導の法則，第 2 式は**モノポールの非存在**を意味する．

2. 変位電流と電磁双対性

Maxwell 方程式の残り半分は，電荷の周りにできる電磁場を記述する．それは電荷密度 $\rho(\boldsymbol{x},\, t)$，電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},\, t)$ に対し，

$$\nabla \times (\mu_0^{-1}\boldsymbol{B}) = \frac{\partial(\varepsilon_0 \boldsymbol{E})}{\partial t} + \boldsymbol{j}, \quad \nabla \cdot (\varepsilon_0 \boldsymbol{E}) = \rho \qquad (4)$$

と書ける．ε_0 は真空の誘電率，μ_0 は真空の透磁率という定数である．第 1 式の右辺第 1 項を変位電流という．電荷の保存の要請からこの項を導入したことが Maxwell の慧眼であった．第 1 式は Ampère の法則を変位電流項によって修正したもの，第 2 式は Gauss の法則である．

変位電流項を導入した結果，$\rho = 0,\, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$ のとき，$\varepsilon_0 = 1,\, \mu_0 = 1$ となるように単位を取ると，(3), (4) は

$$\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{B} \to -\boldsymbol{E}$$

というおきかえで不変になる．

$\rho = 0,\, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$ のとき，(3), (4) より波動方程式

$$\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \Delta \boldsymbol{E}, \quad \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = \Delta \boldsymbol{B}$$

が導かれるのも変位電流項のおかげである．当時の観測結果によると波の速さ $(\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ が光速 c にほぼ等しかった．それで Maxwell はこの電磁場の波を光と同定した．

Maxwell 方程式 (3), (4) は Lorentz 計量

$$c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}{x_1}^2 - \mathrm{d}{x_2}^2 - \mathrm{d}{x_3}^2$$

を保つ座標変換，すなわち Lorentz 変換で不変である．以下 $c = 1$ とする．

3. Dirac モノポール

(4) の第 2 式すなわち Gauss の法則より，空間 $\mathbb{R}^3$ 上の向きづけられた閉曲面 S で囲まれる電荷量は $\int_S \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ に等しい．一方，$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ と定義する限り $\int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$ であり，磁荷すなわちモノポールは存在し得ない．電荷の存在とモノポールの非存在が電磁双対性を破っているのである．

ところが Dirac は，次のような**トポロジー的構成**によればモノポールが存在し得ることを喝破し，電磁双対性の回復への道を開いた．

$\mathbb{R}^3$ から $\{(0,\, 0,\, x_3) \mid x_3 \leq 0\}$ を除いた部分を U_+，$\{(0,\, 0,\, x_3) \mid x_3 \geq 0\}$ を除いた部分を U_- とし，$U_+ \cap U_-$ の点を $(r\cos(\alpha), r\sin(\alpha), x_3)$ で表す．

$P_\pm = U_\pm \times \mathbb{R} \times \mathrm{U}(1)$ 上の接続形式

$$\omega_\pm = \mathrm{d}\theta + \frac{e}{\hbar}(-\varphi_\pm\, \mathrm{d}t + \boldsymbol{A}_\pm \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x})$$

が，$(U_+ \cap U_-) \times \mathbb{R}$ 上ゲージ変換により

$$\varphi_+ = \varphi_- - \frac{\partial \lambda}{\partial t},$$
$$\boldsymbol{A}_+ = \boldsymbol{A}_- + \nabla\lambda$$

で関係づけられているとする．これを **Dirac モノポール**という．$U_+ \cap U_-$ 上 $\nabla \times \boldsymbol{A}_+ = \nabla \times \boldsymbol{A}_-$ なので，$U = U_+ \cup U_- = \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ とすると，磁場 $\boldsymbol{B}$ は $U \times \mathbb{R}$ 上で定まっている．

関数 $\lambda(r,\, \alpha,\, x_3,\, t)$ は，$\mathrm{e}^{\frac{ie}{\hbar}\lambda}$ が時空の各点において定まっていればよいので，整数 n があって

$$\frac{e}{\hbar}\lambda(r,\, \alpha + 2\pi,\, x_3,\, t) = \frac{e}{\hbar}\lambda(r,\, \alpha,\, x_3,\, t) + 2\pi n$$

をみたす．

$S^2 \subset \mathbb{R}^3$ を時刻 $t = 0$ における原点を中心とする半径 1 の球面とし，

$$S_+ = S^2 \cap \{x_3 \geq 0\}, \quad S_- = S^2 \cap \{x_3 \leq 0\},$$
$$C = S_+ \cap S_- = S^2 \cap \{x_3 = 0\}$$

とする．S^2 の向きを $\int_{S_+} \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 > 0$ となる

ように，C の向きを α が増える向きに取ると，モノポールの磁荷 μ は

$$\mu = \int_{S^2} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \left(\int_{S_+} + \int_{S_-}\right) \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}$$
$$= \int_C (\boldsymbol{A}_+ - \boldsymbol{A}_-) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}\alpha = 2\pi n\,\frac{\hbar}{e}$$

となる．ということは，もし Dirac モノポールが存在するならば，電荷量 e は $2\pi\dfrac{\hbar}{\mu}$ の整数倍でなければならない．

(P_+, ω_+) と (P_-, ω_-) を $(U_+ \cap U_-) \times \mathbb{R}$ 上のゲージ変換 λ で貼りあわせたものを (P, ω) とする．P は $U \times \mathbb{R}$ 上の U(1) **主束**という空間であり，ω はその上の接続形式である．$P_\pm = U_\pm \times \mathbb{R} \times \mathrm{U}(1)$ だが，$n \neq 0$ のとき P は $U \times \mathbb{R} \times \mathrm{U}(1)$ と同相ではない．

4. Dirac モノポールによる貼りあわせ[1)]

簡単のため時刻 t を固定する．Dirac モノポールは空間 $\mathbb{R}^3$ の原点に特異性をもつわけだが，この特異性を解消する見方がある．

Dirac モノポールは $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上の対象だが，そのデータ $\omega_\pm, \lambda$ は U の部分集合上の対象であって，言いかえると U 全体では特異性をもっているが，これらを貼りあわせて U 上の Dirac モノポールができるのであった．

そこで次のように考える．3 次元球面 S^3 を $\mathbb{R}^3$ に点 ∞ をつけ加えたものと見なす．

$$V_0 = \mathbb{R}^3, \quad V_\infty = S^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

とおき，Dirac モノポール (P_U, ω_U) を，V_0 上のデータと V_∞ 上のデータを $U = V_0 \cap V_\infty$ 上で貼りあわせて，$S^3 = V_0 \cup V_\infty$ 上の何かを構成するものの一部と見る．

S^3 の開集合 W と W 上の U(1) 主束と接続形式の組 (P_a, ω_a) $(a = 1, 2)$ が与えられているとする．W_+, W_- を S^3 の開集合で $W = W_+ \cup W_-$ をみたすものとし，(P_a, ω_a) は $W_\pm$ 上 $W_\pm \times \mathrm{U}(1)$ とその上の接続形式 $\omega_{a\pm} = \mathrm{d}\theta + A_{a\pm}$ と同一視でき，これらが $W_+ \cap W_-$ 上のゲージ変換 λ_a によって貼りあっているとする．このとき，$W_\pm \times \mathrm{U}(1)$ を $W_+ \cap W_-$ 上のゲージ変換 $\lambda_1 + \lambda_2$ によって貼りあわせてできる W 上の U(1) 主束を $P_1 \otimes P_2$ と書くと，$\mathrm{d}\theta + A_{1+} + A_{2+}$, $\mathrm{d}\theta + A_{1-} + A_{2-}$ が同じゲージ変換によって貼りあって $P_1 \otimes P_2$ 上の接続形式を与える．これを $\omega_1 \otimes \omega_2$ と書く．

S^3 の開集合 W に対し，$W \cap V_0$, $W \cap V_\infty$ 上の U(1) 主束 P_0, P_∞ とそれぞれの上の接続形式 ω_0, ω_∞ が与えられていて，Dirac モノポール (P_U, ω_U) に対し，$W \cap U$ 上の U(1) 主束と接続形式の組の同型

$$(P_0 \otimes P_U,\ \omega_0 \otimes \omega_U)|W \cap U \cong (P_\infty,\ \omega_\infty)|W \cap U$$

があるとする．これらは $W \cap V_0$, $W \cap V_\infty$ 上の U(1) 主束と接続の組の『全体』どうしを $W \cap U$ 上で貼りあわせている．『全体』という言葉でお茶を濁したところをちゃんと言うと亜群という概念になるが，ここでは割愛する．

5. Yang–Mills 方程式

Dirac モノポールの特異性を解消するもう一つのアイデアは，『遠くからは Dirac モノポールのように見えるが原点でなめらかなもの』を考えるというものである．

まずは準備から．C^∞ 多様体かつ群であって演算が C^∞ 級であるものを **Lie 群**という．複素数係数の N 次正則行列全体の集合 $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ がその例である．Lie 群の部分群で閉部分多様体でもあるものを閉部分群という．N 次ユニタリ行列全体の集合 $\mathrm{U}(N)$ は $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ の閉部分群であり，またコンパクトでもある．任意のコンパクト Lie 群は十分大きい N に対し $\mathrm{U}(N)$ の部分群に同型であることが言える．

体 $\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間 $\mathfrak{g}$ 上に双線型な二項演算 $[\,,\,]$ が与えられていて，$[X, X] = 0$ および Jacobi 律

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

が成り立つとき，$\mathfrak{g}$ を**Lie 代数**という．線型代数の力により簡潔な公理系から豊富な世界が湧き出で，数理物理の中心概念になっている．2 つの Lie 代数の間の線型写像で $[\,,\,]$ を保つものを準同型という．Lie 代数の部分ベクトル空間であって $[\,,\,]$ に関して閉じているものを部分 Lie 代数という．$\boldsymbol{k}$ 係数の N 次正方行列全体の集合 $\mathrm{M}_N(\boldsymbol{k})$ は，$[X, Y] = XY - YX$ に関して Lie 代数になる．

写像 $\exp : \mathrm{M}_N(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ を

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$$

で定義するとこれは C^∞ 級かつ全射である．G を $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ の閉部分群とすると，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $\exp(tX) \in G$ となる $X \in \mathrm{M}_N(\mathbb{C})$ 全体の集合 $\mathfrak{g}$ は $\mathrm{M}_N(\mathbb{C})$ の実部分 Lie 代数になる．これを G の Lie 代数という．$\mathrm{U}(N)$ の Lie 代数 $\mathfrak{u}(n)$ は N 次反 Hermite 行列全体である．

$\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ の閉部分群 G の一般の元を表す記号 g を，G 上の $\mathrm{M}_N(\mathbb{C})$ 値 C^∞ 関数と見なす．$\mathrm{d}g$ は G 上の $\mathrm{M}_N(\mathbb{C})$ 値 1 次微分形式であり，$g^{-1}\mathrm{d}g$ は G 上の $\mathfrak{g}$ 値 1 次微分形式である．

時空 $\mathbb{R}^4$ 上の $\mathfrak{g}$ 値 1 次微分形式 $A(x)$ $(x = (\boldsymbol{x}, t))$ に対し，$P = \mathbb{R}^4 \times G$ 上の $\mathfrak{g}$ 値 1 次微分形式

$$\omega = g^{-1}\mathrm{d}g + g^{-1}Ag$$

を P 上の接続形式といい，A を接続あるいは（Yang–Mills）ゲージ場という．G をゲージ群といい，$\mathbb{R}^4$ 上の G 値関数 $u(x)$ に対し

$$(x, g) \to (x, ug)$$

をゲージ変換という．これに対し，

$$\begin{aligned}&(ug)^{-1}\mathrm{d}(ug) + (ug)^{-1}Aug\\ &= g^{-1}\mathrm{d}g + g^{-1}(u^{-1}\mathrm{d}u + u^{-1}Au)g\end{aligned}$$

より，接続は

$$A \to u^{-1}\mathrm{d}u + u^{-1}Au$$

と変換される．というか，この式が出るように ω の形を決めたのである．

$$F = \mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

を曲率という．これはゲージ変換に対し

$$F \to u^{-1}Fu$$

と変換される．また，

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}\omega \wedge \omega - \omega \wedge \mathrm{d}\omega = F \wedge \omega - \omega \wedge F$$

となる．これを Bianchi 恒等式という．

$$*(\mathrm{d}\boldsymbol{x} \wedge \mathrm{d}t) = \boldsymbol{\sigma}, \quad *\boldsymbol{\sigma} = -\mathrm{d}\boldsymbol{x} \wedge \mathrm{d}t$$

とするとき，ゲージ変換と Lorentz 変換で不変な偏微分方程式

$$\mathrm{d}(*F) = (*F) \wedge \omega - \omega \wedge (*F)$$

を Yang–Mills 方程式という．

G が Abel 群のときは Bianchi 恒等式と Yang–Mills 方程式の右辺が消え，A は Maxwell 方程式の電荷のない場合と同じ方程式に従う．

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の非退化双線型形式 $\langle\,,\,\rangle$ で

$$\langle [X, Y], Z\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle = 0$$

をみたすものを不変擬内積とよぶ．$\mathbb{R}$ 上の Lie 代数の場合，正定値のものを不変内積とよぶ．不変内積が存在することは，コンパクト Lie 群の Lie 代数であることに同値である．

不変内積に対し，

$$\begin{aligned}\mathcal{YM}(A) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4} \langle F, *F\rangle\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4} |F|^2\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}t\end{aligned}$$

を Yang–Mills 作用という．不変擬内積の場合 $|F|^2$ と書いた部分は F の成分に関する 2 次形式というだけだが，不変内積ならここが非負なので $|F|^2$ と書いたのである．

Yang–Mills 方程式は Yang–Mills 作用の臨界点を与える Euler–Lagrange 方程式である．

6. 't Hooft–Polyakov モノポール[2, 3]

接続 $A = -\Phi\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ が時刻 t によらず，また，エネルギー $\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |F|^2\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$ が有限であるとする．さらに $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ のとき $\Phi(\boldsymbol{x})$ がゲージ変換を除いて 1 点 $\phi_0 \in \mathfrak{g}$ に収束するとす

る．このとき，

$$G \cdot \phi_0 = \{g\phi_0 g^{-1} \mid g \in G\} \subset \mathfrak{g}$$

とおくと，S^2 上の $G \cdot \phi_0$ 値関数

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \lim_{s\to\infty} \Phi(s\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in S^2)$$

が得られる．また，

$$G_{\phi_0} = \{g \in G \mid g\phi_0 g^{-1} = \phi_0\}$$

とおくと，$G \cdot \phi_0$ は商集合 G/G_{ϕ_0} と同一視できる．このときゲージ変換により，

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} [A_j(\boldsymbol{x}),\, \Phi(\boldsymbol{x})] = 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

とすることができる．これは無限遠では対称性が破れてゲージ群が G_{ϕ_0} に縮小していると見ることができるということである．(A, Φ) を**'t Hooft–Polyakov** モノポールという．

$\mathrm{T}^N \subset \mathrm{U}(N)$ を対角行列からなる部分集合とする．T^N は $\mathrm{U}(1)^N$ に同型な Abel 群である．$\phi_0 \in \mathfrak{u}(N)$ の固有値がすべて相異なるとき，$\mathrm{U}(N)_{\phi_0} = \mathrm{T}^N$ となり，$\mathrm{U}(N) \cdot \phi_0$ は商集合 $\mathrm{U}(N)/\mathrm{T}^N$ と同一視できる．

コンパクト連結 Lie 群 $G \subset \mathrm{U}(N)$ に対し，$T = \mathrm{T}^N \cap G$ を G の極大トーラスという．T は $\mathrm{U}(1)^r$ に同型である．r を G の階数という．$\phi_0 \in \mathfrak{g}$ を十分一般的に取ると，$G_{\phi_0} = T$ となり $G \cdot \phi_0$ は G/T と同一視できる．無限遠ではゲージ群が Abel 群 T に縮小している，すなわち A は電磁場になっていて，$\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上の T 主束 P_T 上の接続に近づく．すなわち A は無限遠では Dirac モノポールに見えるのである．

T 主束 P_T の同型類は，連続写像

$$\Phi : S^2 \to G/T$$

のホモトピー類（次節）$[\Phi]$ によって分類される．離散的な量である $[\Phi]$ は磁荷に相当する．

7. 基本群とホモトピー群

位相空間 X の 2 点 x_0, x_1 に対し，連続写像 $\gamma : [0, 1] \to X$ で $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$ となるものを，x_0 から x_1 への道という．任意の $x_0, x_1 \in X$ に対して x_0 から x_1 への道が存在するとき，X は道連結であるという．

位相空間 X から Y への連続写像を元とするある集合を $\mathcal{C}$ とする．$\mathcal{C}$ 上にも道に相当する概念を定義することができる．$f_0, f_1 \in \mathcal{C}$ に対し，連続写像 $h : X \times [0, 1] \to Y$ で

$$h(x, 0) = f_0(x), \quad h(x, 1) = f_1(x),$$

$$h(\cdot, t) \in \mathcal{C} \quad (t \in [0, 1])$$

をみたすものを f_0 から f_1 へのホモトピーという．ホモトピーの存在は集合 $\mathcal{C}$ 上の同値関係である．その同値類をホモトピー類という．

位相空間 X と点 $x_0 \in X$ に対し，連続写像 $\gamma : [0, 1] \to X$ で $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ をみたすもの全体の集合を $\mathcal{C}$ とするとき，ホモトピー類の集合 $\pi_1(X, x_0) = \mathcal{C}/\sim$ は群の構造をもつ．これを (X, x_0) の**基本群**という．X が道連結であるとき，任意の $x_0, x_1 \in X$ に対し，$\pi_1(X, x_0)$ と $\pi_1(X, x_1)$ は同型である．そこでこれを単に $\pi_1(X)$ と書くことも多い．

n を 2 以上の自然数とする．n 次元球面 S^n から道連結な位相空間 X への連続写像のホモトピー類全体の集合 $\pi_n(X)$ は Abel 群の構造をもつ．これを X の **n 次ホモトピー群**という．

前節の設定に戻ると，G が G/T 上の T 主束であることからアーベル群の完全列

$$0 \to \pi_2(G/T) \to \pi_1(T) \to \pi_1(G) \to 0$$

が得られる．さらに $\pi_1(T)$ は $\mathbb{Z}^r$ に同型であって，T の Lie 代数 $\mathfrak{t}$ の離散的加法部分群 $X^\vee(G)$ と同一視できる．$X^\vee(G)$ を G のコウェイト格子という．

そういうわけで，'t Hooft–Polyakov モノポールの磁荷 $[\Phi]$ は G のコウェイト格子 $X^\vee(G)$ に値をとる．

8. Yang–Mills ゲージ場に対する電荷[4, 5)]

一般のコンパクト Lie 群 G をゲージ群とする

ゲージ場の場合，電荷に相当する量は何だろうか？それは G の**既約表現**に対応する．

群 G から $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ への準同型 ρ を G の複素 N 次元表現という．像 $\rho(G)$ が $\mathrm{GL}_k(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_{N-k}(\mathbb{C})$ $(0 < k < N)$ と共役な部分群に入らないとき，ρ は既約であるという．無限次元の表現，既約表現も定義できる．

一般に Lie 群 G とその閉部分群 H，および表現 $\rho_H : H \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ に対し，G 上の $\mathbb{C}^N$ 値 C^∞ 関数 ψ で

$$\psi(gh) = \rho_H(h^{-1})\psi(g) \quad (g \in G,\ h \in H)$$

をみたすもの全体のなす複素ベクトル空間は G の表現を与える．一般にはこれは既約にならないので，ある線型偏微分方程式の解となる ψ のみを考えたりする．このような構成を誘導表現という．

Borel–Weil–Bott の理論により，コンパクト Lie 群 G の既約表現が，極大トーラス T の既約表現，すなわち T から $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ への準同型から誘導表現により構成される．自由場の理論では，Spin(3) の既約表現から Poincaré 群の既約表現を構成するのに Klein–Gordon 方程式や Dirac 方程式を用いるが，Borel–Weil–Bott の理論では Cauchy-Riemann 方程式を用いる．T から $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ への準同型全体はやはり $\mathbb{Z}^r$ と同型であり，$\mathfrak{t}$ の双対 $\mathfrak{t}^*$ の離散的加法部分群 $X(G)$ と同一視できる．$X(G)$ を G のウェイト格子という．

そういうわけで，コンパクト Lie 群 G をゲージ群とするゲージ場の場合，電荷はウェイト格子 $X(G)$ に値をとる．

9. Langlands 双対[6~9]

コンパクト Lie 群 $G \neq \mathrm{U}(1)$ であって，その Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が 2 つの Lie 代数の直和に分解できないものをコンパクト単純 Lie 群という．

コンパクト単純 Lie 群の対 $(G, {}^LG)$ で，

$$X^\vee(G) = X({}^LG), \quad X(G) = X^\vee({}^LG)$$

という自然な同一視をもつものがある．これを Langlands 双対という．例えば，

$$G = \mathrm{SU}(N), \quad {}^LG = \mathrm{PU}(N);$$
$$G = \mathrm{Sp}(2N), \quad {}^LG = \mathrm{SO}(2N+1);$$
$$G = \mathrm{Spin}(2N), \quad {}^LG = \mathrm{SO}(2N)/\{\pm 1\};$$
$$G = E_8, \quad {}^LG = E_8$$

である．このことは，ゲージ群 G に対する電荷が ${}^LG$ に対する磁荷に，G に対する磁荷が ${}^LG$ に対する電荷に対応していることを示唆している．

Langlands 双対の概念は，数論における Langlands プログラムの出発点である．これは，数体のガロア群の G への表現と ${}^LG$ の保型表現の間の対応という形で類対論の非可換化を定式化するもので，1 のべき根の類似は何かという問いに端を発している．数体の Langlands プログラムの類似として，関数体の Langlands プログラム，さらに幾何学的 Langlands プログラムというものがあって現代数学の一つの潮流をなしているが，そこに電荷とモノポールの間の電磁双対性が新たな刺激を与えている．

参考文献

1) J-L. Brylinski, "Loop Space, Characteristic Classes and Geometric Quantization", Birkhäuser (1993).
2) L.H. Ryder, "Quantum Field Theory", Cambridge (1996).
3) J.M. Figueroa-O'Farrill, Electric-magnetic duality for children. `http://www.maths.ed.ac.uk/~jmf/Teaching/EDC.html`
4) W. Fulton, J. Harris, "Representation Theory: A First Course", Springer (2004).
5) G.W. Mackey, "Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics", Benjamin (1968).
6) C. Motonen and D. Olive, "Magnetic monopoles as gauge particles?" *Phys. Lett. B* **72** (1977).
7) A. Kapustin and E. Witten, "Electric-magnetic duality and the geometric Langlands program", hep-th/0604151.
8) E. Frenkel, "Gauge theory and Langlands duality", arXiv:0906.2747.
9) J. Bernstein and S. Gelbart (eds.), "An Introduction to the Langlands Program", Birkhäuser (2003).

（はしもと・よしたけ，東京都市大学知識工学部）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

坂井 典佑

1984年7月号

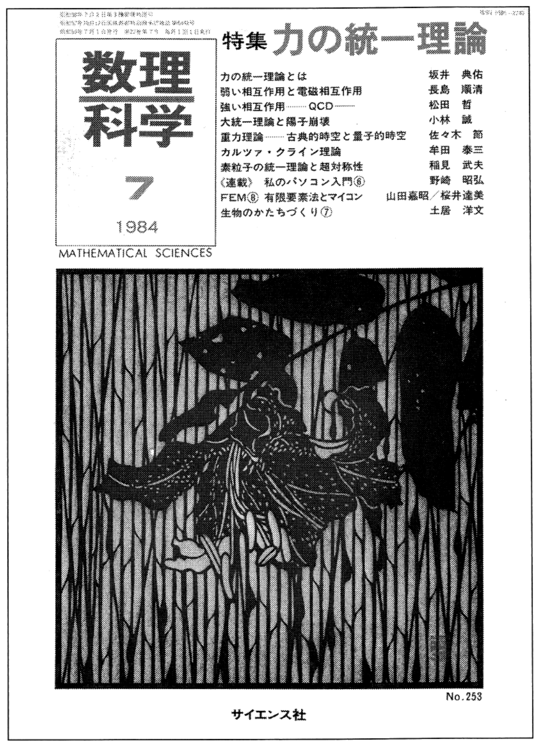
1984年に本誌は「力の統一理論」を特集しました．30年間の進歩を振り返り，今後の課題を考えます．

QCD（量子色力学）が強い力を記述し，電弱統一理論が電磁気力と弱い力を統一したのは1970年代でした．電弱統一理論とQCDを合わせて，素粒子の標準模型と呼びます．弱い力を媒介するW，Z粒子はCERNの電子・陽電子衝突型加速器LEPで1983年に見つかり，小林・益川理論が予言した6種類のクォークのうち，5種類は30年前までに見つかりました．残るトップクォークは異常に重く，1995年にようやく発見されました．最後に，2013年にCERNのハドロン衝突型加速器LHCでヒッグス粒子が発見されました．

一方，カミオカンデなどの活躍により1990年代にニュートリノ振動が確立しました．その結果，ニュートリノが質量を持つので，最小標準模型に修正が必要になりました．これは標準模型を超える統一理論が背後にあることを示唆します．これ以外では，標準模型と明らかに矛盾する実験事実は見当たりません．

標準模型では力の「ゲージ原理」が共通なだけで，3つの力（強い力，弱い力，電磁気力）を3つの異なる結合定数で記述します．しかし，これらは大変高いエネルギーで一つに大統一される可能性があります．量子重力のエネルギースケールはさらに大きく，大きなエネルギースケールを持つ基本理論から，はるかに小さなW，Z粒子の質量を説明しなければなりません．これがゲージ階層性問題です．

対称性を用いてゲージ階層性問題を解決するには，超対称性が有力です．LEP実験で精密測定された3つの結合定数を高エネルギーに外挿すると，超対称性を仮定した場合にだけ，見事に一つの結合定数に大統一されることが分かりました．この事実は超対称性の最も強い間接的検証です．一方，期待された陽子崩壊は未発見で，最近のLHC実験では，ヒッグス粒子だけが発見され，期待されていた超対称性粒子は見つかっていません．したがって，超対称性が見えてくるのは，



もう少し高いエネルギーと考えざるを得ません．量子重力を含む統一理論は，超弦理論が最有力です．

ヒッグス粒子複合粒子説はゲージ階層性解決のもう一つの可能性ですが，非摂動効果の理解が必須であり，実験事実と矛盾しない予言力のある模型がまだできていません．余剰次元（ブレーン・ワールド）模型は，この30年間に発展した新たな可能性で，高次元時空中の部分空間（ブレーン）に，標準模型の粒子が局在するという仮説です．余剰次元時空では，LHC実験で小さなブラックホールが生成されるかもしれないと話題になりましたが，実証されていません．

来年再開予定のLHC実験で，標準模型を超える統一理論の片鱗が見えることを期待しましょう．

（さかい・のりすけ，慶應義塾大学自然科学研究教育センター）

微分方程式を考える

第1回

数学は現象をいかに記述しているか

序論

微分方程式の記述する現象とは何か

小 澤　徹

この連載では，主として物理現象を例に取り，現象の本質を記述する言葉（言語）である数学の機能が書き込まれ埋め込まれた対象として微分方程式を考える．その解読の過程において，現象の本質をより深く理解する視点を獲得しつつ，数学的抽象概念や公理系などを現象に結び付けて理解する方法論を探り，微分方程式を通じて現象に潜む数学的構造を捉えることにより，現象の本質に迫ろうというのが本連載の目的である．

1.1 現象の模型化と微分方程式

ほとんどすべての物理現象は微分方程式の形で表される．物理現象の記述は，考察の対象とする物理量（位置，速度，加速度，密度，分布，波動関数，場など）を定め，その変動率（時間変化，空間変位，変分など）を力や流れなどの**収支の均衡**という視点から等式を立て，方程式を導出することから始まる．変動率の表現に微分法が用いられれば，その方程式は微分方程式となるのであり，物理現象の記述に微分方程式が用いられるのは必然とも言える．この事情は，古典力学と微分積分学の基礎が形成され始めたニュートン（Sir Isaac Newton, 1642–1727）やライプニッツ（Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716）の時代から一貫して不変である．

物理学に現れる微分方程式の具体例を幾つか挙げておこう．時間変数 t は実数であり，空間変数 x は 3 次元ユークリッド空間の点であるとする．その事情を，$\mathbb{R}$ を実数全体の集合，$\mathbb{R}^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3); x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ をその直積空間として $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3$ と表すことにする．3 次元ユークリッド空間には標準的な内積（スカラー積）$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ および外積（ベクトル積）$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$ を導入し，向き付けら

れた完備内積空間として考える．また，物理定数等はすべて規格化・無次元化した設定で，数学的に単純化した形で考えることにする．初期値問題を念頭に置き，初期時刻 $t_0 \in \mathbb{R}$ を含む区間を $I \subset \mathbb{R}$ と表す．

ニュートンの運動方程式

$$x''(t) = F(t, x(t), x'(t)).$$

ここに $x : I \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^3$ は時間変数 t を独立変数とする（有限次元）ベクトル値関数で $F : I \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (t, x, v) \mapsto F(t, x, v) \in \mathbb{R}^3$ は時間変数 t，空間変数 x，速度変数 v を独立変数とする**与えられた**ベクトル値関数とする．未知関数 x の時刻 t における値 $x(t)$，微分係数 $x'(t)$，二階微分係数 $x''(t)$ は，それぞれ質点の位置，速度，加速度を表し，$F(t, x, v)$ は，時刻 t において位置 x にあり速度 v を持つ質点に働く力を表す．ニュートンの運動方程式は，力の場の影響下で質点の運動が時間的に変化する様子を微分方程式の形で表したものであり，非線形（即ち，線形とは限らない）常微分方程式である．

ナビエ・ストークス方程式（ナビエ（Henri Navier, 1785–1836），ストークス（Sir George Stokes, 1819–1903））

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u = \Delta u - \nabla p, \quad \mathrm{div}\ u = 0.$$

ここに $u : I \times \mathbb{R}^3 \ni (t, x) \mapsto u(t, x) \in \mathbb{R}^3$ は時間変数 t および空間変数 x を独立変数とするベクトル値関数，$p : I \times \mathbb{R}^3 \ni (t, x) \mapsto p(t, x) \in \mathbb{R}$ は (t, x) を独立変数とするスカラー値関数，$\nabla p = (\partial_1 p, \partial_2 p, \partial_3 p)$, $\Delta u = \partial_1^2 u + \partial_2^2 u + \partial_3^2 u$, $u \cdot \nabla u$ の第 j 成分は $(u \cdot \nabla) u_j = (u_1 \partial_1 + u_2 \partial_2 + u_3 \partial_3) u_j$ で与えられるものとする．ただし $\partial_t = \partial / \partial t$ は時間変数に関する偏微分作用素，$\partial_j = \partial / \partial x_j$ は第 j 座標軸に関する偏微分作用素，u の成分表示は $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))$ であるとする．$u(t, x)$ および $\nabla p(t, x)$ はそれぞれ時空 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ の点 (t, x) における流体の速度ベクトルおよび流体に働く圧力勾配を表し，$\mathrm{div}\ u = \nabla \cdot u = 0$ は流体が非圧縮性であることを表す．ナビエ・ストークス方程式は，流体の速度場が時間的・空間的に変化する様子を連立微分方程式の形で表したものであり，非線形放物型偏微分方程式系である．

ボルツマン方程式（ボルツマン（Ludwig Boltzmann, 1844–1906））

$$\partial_t f + v \cdot \nabla f = Q(f, f).$$

ここに $f : I \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (t, x, v) \mapsto f(t, x, v) \in \mathbb{R}$ は時間変数 t，空間変数 x，速度変数 v を独立変数とする実数値関数で，∇f は x に関する勾配 $\nabla f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)$，$Q$ はボルツマンの双線形衝突作用素

$$\begin{aligned}&(Q(f, g))(v)\\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} B(v - v', \omega) \left(f(v_+)\, g(v_-) - f(v') g(v) \right) d\omega dv'\end{aligned}$$

とする．ただし $v_{\pm} = (v + v')/2 \pm |v - v'| \omega / 2$, S^2 は $\mathbb{R}^3$ における単位球面

$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}, d\omega$ は S^2 上の面積要素（ルベーグ測度），$B : \mathbb{R}^3 \times S^2 \ni (v, \omega) \mapsto B(v, \omega) \in \mathbb{R}$ は与えられた実数値関数である．未知関数 f は，時刻 t において位置 x にあり速度 v を持つ気体分子の密度分布を表し，B は気体分子の衝突則を表す切断面である．ボルツマン方程式は，気体分子の密度分布が時間的・空間的に変化する様子を微分方程式の形で表したものであり，非局所的な非線形項を持つ非線形双曲型偏微分方程式である．

マクスウェルの方程式（マクスウェル（**James Clerk Maxwell, 1831–1879**））

$$\begin{cases} \partial_t B = -\operatorname{curl} E, & \operatorname{div} B = 0, \\ \partial_t E = \operatorname{curl} B - j, & \operatorname{div} E = \rho. \end{cases}$$

ここに $B, E, j : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は (t, x) を独立変数とするベクトル値関数，$\rho : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は (t, x) を独立変数とするスカラー値関数であり，$\operatorname{curl} = \nabla \times$ および $\operatorname{div} = \nabla \cdot$ はベクトル場に対する回転および発散であるとする．マクスウェルの方程式は，4 次元時空における電荷密度 ρ と電流密度 j の分布によって電場 E と磁場 B が誘起され，これらの場が相互に影響を及ぼしながら時間的・空間的に変化する様子を連立微分方程式の形で表したものであり，定係数双曲型線形偏微分方程式系である．

シュレディンガー方程式（シュレディンガー（**Erwin Schrödinger, 1887–1961**））

$$i\partial_t u = -\frac{1}{2}\Delta u + Vu.$$

ここに $u : I \times \mathbb{R}^3 \ni (t, x) \mapsto u(t, x) \in \mathbb{C}$ は (t, x) を独立変数とする複素数値関数，i は虚数単位，$V : \mathbb{R}^3 \ni x \mapsto V(x) \in \mathbb{R}$ は与えられた実数値関数とする．シュレディンガー方程式は，ポテンシャル V の影響下で波動関数 u が時間的・空間的に変化する様子を微分方程式の形で表したものであり，分散型線形偏微分方程式である．

ディラック方程式（ディラック（**Paul Dirac, 1902–1984**））

$$i\partial_t u = -i\sum_{j=1}^{3} \alpha_j \partial_j u + m\beta u + Vu.$$

ここに $u : I \times \mathbb{R}^3 \ni (t, x) \mapsto u(t, x) \in \mathbb{C}^4$ は (t, x) を独立変数とする（4 つの複素数値関数を成分に持つ）ベクトル値関数，α_j と β は $I = (\delta_{ij})$ を単位行列として $\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 2\delta_{jk} I$, $\beta^2 = I$, $\alpha_j \beta + \beta \alpha_j = 0$ なる反交換関係を満たす 4 次エルミート行列，$m \geq 0$ は定数，$V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は与えられた実数値関数とする．ディラック方程式は，ポテンシャル V の影響下でベクトル値波動関数 $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ が時間的・空間的に変化する様子を連立微分方程式の形で表した線形偏微分方程式系で，無質量（$m = 0$）なら双曲型で正質量（$m > 0$）

なら分散型となる．

時空両変数 (t, x) を独立変数とする未知関数 u を持つ非線形偏微分方程式を時間変数 t についての発展方程式と見なす場合には，u を $(u(t))(x) = u(t, x)$ として $u : I \ni t \mapsto u(t) \in X$ と考える．ここに X は $\mathbb{R}^3$ 上で定義されたベクトル値関数のなす適当なバナッハ空間（例えば一階のソボレフ空間 $H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ など）であるとする．この立場では独立変数は t であり，u は無限次元ベクトル空間 X における力学系と見なしたものと考えられる．

さて，以上は，物理現象を表すとされる微分方程式の典型的具体例であり，実験・計測技術や計算機の発展に支えられた**現象の再現化・可視化**における著しい進歩，さらには科学技術への実用化における長足の進歩とともに，揺るぎない信頼を獲得しているものである．

しかし，現実に目の前で起こっている物理現象から考えてみると，不思議な点は数多く指摘されるであろう．まず，時間変数は実数としているが，どんなに計測技術が進歩しても有理数表示を超えることは不可能であろう．古典力学における質点の概念は質量と位置からなるが，位置は大きさのない点であり，質量を持つ大きさのない点としての物体は現実には有り得ない．また，物体が等速直線運動するといっても，直線には太さもないのであるから書き表しようもない．ユークリッド空間全体で流体の速度場や電磁場を想定するには，空間は無限に拡がっており，そのすべての位置に対して対応するベクトルが一つずつ定まっていない限り無意味である．

こういった指摘に対し，「実際に起きている現象は有限な拡がりを持っているのであり，ユークリッド空間全体で考えるのは数学的理想化に過ぎない」との反論も聞こえてきそうである．しかし，もしそう主張したいのであれば，初めから微分方程式を有界領域で考え，適切な境界条件（ディリクレ零条件，ノイマン零条件，周期境界条件，自由境界条件など）を与えて議論すれば良いだけの話となり，そもそも設定が間違っていたことを認めて貰わねばなるまい．一例を挙げれば，有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ において，シュレディンガー作用素（ハミルトニアン）$H = -\frac{1}{2}\Delta + V$ を Ω 上の自乗可積分関数全体のなすヒルベルト空間 $L^2(\Omega; \mathbb{C})$ 上の自己共役作用素として量子力学的枠組みを設定し，対応する力学系を論じるためには，定義域の指定やその特徴付けといった基礎的議論から始めて，少なくともそのスペクトル理論まで構築する必要がある．しかし，$\mathbb{R}^3$ から Ω に変えた途端，連続スペクトルは消滅し離散スペクトル（固有値）のみになってしまう事態が予想され，そもそも作用素としては全く性質の異なる対象を扱っていることとなる[1)]．また，フーリエ変換や（並進，回転，伸長などの運動群に関する）対称性に基づく手法が一切使えなくなってしまい，有用な数学的方法論を失うこととなる．一方，コンパクト性に基づく論理が主要な論法として浮上する．このように，対象とすべき領域を変更することは，それに伴う数学的枠組みや数学的方法論を根本的に変えることを意味し，問題設定そのものを変更することと同値であると認識すべきである．

さて，現象を記述するために導出された微分方程式およびその前提となる枠組みが，実際目の前で起こっている現象およびそれを取り巻く環境と比較して，極端に理想化・単純化した形を取っている様子を例を挙げて説明したが，次に，そういった方法論を支える考え方や意義について論じ，微分方程式と現象を結び付ける第一歩としよう．

まず注目すべきは，時空の設定も導出された微分方程式も，実際の現象に基づいて考察された枠組みではあるものの，模型化（モデル化）されたものであるという点である．模型化とは，実際の現象の中から本質的なものだけを単純化して抽出する一方，それに比較して重要でない要素は一切無視して棄て去るという一連の工程である[2)]．従って，模型（モデル）には，現象の複写（コピー）である必要性はないものの，現象の本質が単純化した形で抽出され的確に表現されていることが求められる．模型化が微分方程式という数学的体裁を取った時点で，それは現象の観測からいったん切り離され，数学的対象として扱われることとなり，数学的検討を経て得られた結果のみが成果として残る．その成果が現象の本質を衝いていれば，その模型は現象を説明する理論として残り，そうでなければ棄て去られるのみである．上に挙げた模型方程式（モデル方程式）は数々の検証を経て残ったものである．残った理論はどれも単純な形を取っており，極端に抽象化されている．この事実は，現象を記述し説明する学問としての科学における模型化の意義を充分に示すものである．本質論を巡るプラトンとアリストテレスの思想対立が，模型化と微分方程式と数学によって統合されたかの如くである．現象の本質を究極まで単純化して残った理論と，そこまで一歩及ばず残らなかった理論との対比の例として，特殊相対論におけるアインシュタイン（Albert Einstein, 1879–1955）の理論とローレンツ（Hendrick Lorentz, 1853–1928）やポワンカレ（Henri Poincaré, 1845–1912）の理論が挙げられる[3, 4)]．しかしその一方，完成された特殊相対論の理論体系において，ミンコフスキ空間における運動群がローレンツ群（斉次の場合），ポワンカレ群（非斉次の場合）と呼ばれ，極めて重要で基礎的な概念として残っていることは興味深い．

次に注目すべきは，模型化に伴う抽象化の効用である．質点という抽象化があって初めてニュートンの運動方程式が意味をなし，経験則に過ぎなかったケプラーの法則が理論的に説明されたり，電磁場という（可視光線を除いて）目に見えない対象に，抽象化された場という概念を与えて初めてマクスウェルの方程式が意味をなし，波動としての電磁場の存在が導かれるのである．このような例は枚挙に暇がないが，どの例を取っても，抽象化を経て初めて明快に理解されるという特徴を共通に持っている．

最後に指摘すべき点は，現象を手本として考案した模型でも，いったん現象から離れてある程度自由に，一般化した枠組みで一般化した模型を検討することにより，現象の本質がより深く理解できたり，新たな現象の予測が理論的に可能となったりすることである．ダランベール（Jean le Rond D’Alembert, 1717–1783）の自由波動の伝播における 2 次元と 3 次元の違いは，一般次元で

議論して初めて偶数次元と奇数次元の違いとして理解できる．ベクトル積（外積）が二項演算として意味を持つのは3次元のみであるという結果も，一般次元で考えて初めて理解され，3次元空間の際立った優位性（または特殊性）を教えてくれるものとなっている．同じ形で表される相互作用でも，その数学的性質は空間次元によって全く異なることは，相互作用と空間次元を一般化して初めて分かるものである[5~7]．ラグランジアンを書き下すことから始める模型化が新たな粒子の存在の予想に直結していることは，湯川や南部，ヒッグスの理論を例に取れば明らかであろう[8]．

1.2 解の概念

前節では，現象とその模型化の最終形態としての微分方程式との関係について，物理現象を題材として議論した．本節では，微分方程式とその解との関係について，現象の記述という観点から出発して考察を深めよう．ここで重要な視点は，「微分方程式によって現象を記述する」あるいは「現象を記述する微分方程式」といった表現は慣習的に良く使われるものと認めつつも，現象を特徴付ける物理量を中心に置く限り，現象を記述しているのは微分方程式そのものではなく微分方程式の解であるという出発点に立ち戻ることである．従って，現象を模型化した枠組みで捉える立場を取る以上，**現象の実在**は**模型方程式の解の存在**と同値な概念となる．

「現象の本質を的確に模型化したのであるから解が存在するのは当然である」という主張は一見もっともらしいが，「的確な模型化」とは「解が現象を的確に表現している」と解釈すれば，そもそも**解の存在が大前提**となっていることは明らかである．

ここで，解の存在と解の具体的表示との違いについて述べておこう．微分方程式には，求積法で解けるもの，積分核を用いた解の積分表示・明示公式を持つもの（基本解・グリーン関数が具体的に計算できるものや半空間におけるストークス方程式に対する鵜飼の公式[9]など），発見者にちなんで命名された特殊解（ソボレフ臨界指数を持つ非線形楕円型方程式（山辺の問題）に対するタレンティ解[10]，零構造を持つ非線形波動方程式に対するニーレンバーグ解[11]，2次元水面波方程式に対する小澤解[12]，多孔質媒質方程式に対するバーレンブラット解[13]など）を持つものなど，解の具体的表示が知られているものがある．しかし，解の具体的表示をもつ微分方程式は極めて特別である．非線形偏微分方程式に対して今後も特殊解が発見されるものと期待されるが，そうした機会は稀であり，発見された特殊解は貴重な数学的対象となるに違いない．このように，ほとんどの微分方程式には解の具体的表示は期待できないのが現状である．一方，解の具体的表示はなくても解の存在が保証されている微分方程式もある．実際，初期値問題や境界値問題などの特定の限定条件の下では解の存在が保証される場合が少なくない．この半世紀において，非線形偏微分方程式を論じた論文のほとんどは，こうした問題を扱ったものである．解の存在と解の具体的

表示との対比に関しては，複素係数 n 次方程式には複素数の範囲で解が存在するというガウスの定理（代数学の基本定理）と 5 次以上（$n \geq 5$）の方程式は代数的には解き得ない（基礎体の四則演算および冪乗根を施す操作を有限回繰り返しても根は得られない）というアーベルの定理を想起するのも良いかも知れない．この 2 つの定理は何ら矛盾するところがない．両定理を統合すれば，「解は必ずあるが，その方法では解けない」と述べているのであり，解の存在は解の具体的表示よりも格段に広い概念であると教えていると理解されるのである．

では，解の存在とは何を意味するものであろうか？ まず，解の存在を議論するためには解の定義が明確に与えられていなければならない．解の定義には「解の属すべき集合」と「解が満たすべき等式」を明確にすることが重要である．前者は「解をどの範囲で捉えるのか」，後者は「方程式をどのように満たす解を捉えるのか」という前提条件を明確化する．代数方程式 $x^2+1=0$ は実数の範囲 $\mathbb{R}$ では解を持たないが，複素数の範囲 $\mathbb{C}$ では解を持つ．この事情は，$f(x)=x^2$ に対し $-1 \notin [0,\infty)=f(\mathbb{R})$，$-1 \in \mathbb{C}=f(\mathbb{C})$ として f の値域の特徴付けから理解することもできる．もう一つ例を挙げれば，与えられた y に対し $e^x=y$ なる x を求めよという問題では，実数の範囲では $y>0$ なら解は（一つだけ）存在し，$y \leq 0$ なら解は存在しないし，複素数の範囲では $y \neq 0$ なら解は（無限個）存在し，$y=0$ なら解は存在しない．この事情も $f=\exp$ に対し $(0,\infty)=f(\mathbb{R})$，$\mathbb{C}\setminus\{0\}=f(\mathbb{C})$ として f の値域の特徴付けから理解することもできる．婚礼のお祝いに「2 万円を包むのは 2 で割れるから良くない」という主張に対し「3 万円でも 2 で割れ，答えは 1 万 5 千円」との反論が出るが，これは $f(x)=x/2$ に対し $1.5 \notin \mathbb{Z}=f(2\mathbb{Z})$ と $1.5 \in \mathbb{Q}=f(\mathbb{Q})$ との違いであり，解の（2 で割ったときの数）の属すべき集合が整数か有理数であるかの違いと理解される．

一つの微分方程式に対しても，解の満たすべき等式の候補は一つとは限らない．発展方程式に対する初期値問題では，元々設定したバナッハ空間 X における微分方程式を X で満たす強解，X に双対性の概念を導入して定義される弱解，時間も込めて $L^\infty(I;X)$ に双対性の概念を導入して定義される弱解，ゲルファント（Israel Moiseevich Gel'fand, 1913–2009）やリオンス（Jacques-Louis Lions, 1928–2001）の意味での三つ組 $V \subset X \subset V'$ の枠組みで定義される弱解，微分方程式をデュアメル（Jean-Baptiste Du Hamel, 1624–1706）式に転換した積分方程式の解としての弱解，時空の各点で意味を持つ解としての古典解など，多種多様な解のあり方が存在する．最大値原理や比較定理が成り立つような順序構造を持つ枠組みでは粘性解の概念も重要となる[14)]．

さて，解の定義を一つ固定したとして，その存在をどのように証明するのかという問題が生ずる．存在証明に関する代表的な論法として，順序構造に基づくもの（極大元の存在定理としてのツォルンの補題や，それと同値な一連の命題），完備性に基づくもの（コーシー列に対する極限の存在），点列コンパクト性に基づくもの（有界列に対する収束部分列の存在）[15)]，連結性に基づくもの（「解の存在」を保証する部分集合が連結空間の空でない開かつ閉部分集合であ

ることを示す方法)[16] などが挙げられるが，どれも集合論・位相空間論の基礎をなす概念であり，実数の定義やその性質の探究を巡って得られたものであることは実に興味深い．解の存在に関する具体的論法については，次回以降逐次取り上げて行く予定である．

このように，模型方程式の解の存在が保証されて初めて，模型化された枠組みでの現象の実在が保証され，現象を数学的に認識することが可能となるのである．しかし，解の存在が保証されたといっても，それが唯一のものであるかどうかは，また別の話である．特に，コンパクト性に基づく存在定理は一意性まで同時に保証するわけではなく，改めて一意性について考える必要が生ずる．言い方を換えれば，一意性の議論は存在定理とは独立に成立する．解の存在とは「解は少なくとも一つ存在する」という立場から解の数が一つ以上であるという主張であるのに対し，解の一意性とは「解はあったとしても一つだけ」という立場から解の数は一つ以下であるという主張である．解の存在を予め仮定した上での「あったと仮定しても一つだけ」という主張は，「実は解は存在しなかった」という場合を排除しているわけではないことに注意すべきである．解の一意性の証明の典型的な論法は，「解が2つ存在したと仮定して，実はその2つが同一のものであった」というものであろう．この手の論法は代数学にも頻繁に現れる．また，どんな解を取ってきても，必ず特定の表示に帰着されてしまうという論法が，一意性の議論に用いられることもある．

では，解の一意性とは現象との関係において何を意味するものであろうか？一意性とは，解の存在が保証されているものとすれば，同一の条件下では同一の現象が起こることを述べているのであり，実験室水準では**実験の再現性**を保証するものであると同時に，理論的水準では**現象の一意的な予言**を保証してくれる根拠となるものである．逆に解の一意性が破綻している場合を想起するには，数値解析で同一のプログラムの下に同一の条件で計算機を走らせても，毎回異なった画像を見せ付けられる事態を想像すれば良いだろう．数学固有の問題に限っても一意性は有用である．一意性が保証されている限り，それを満たすものを如何なる手段を用いて見つけてきたとしてもそれで充分というわけであり，誠に有難い話である．三角関数，双曲関数や楕円関数の加法公式や逆関数表示などの関数等式は，微分方程式の解の一意性から導くことも可能である[17]．

なお，解の存在と一意性についての未解決問題は数多く残っている．空間3次元におけるナビエ・ストークス方程式の初期値問題の弱解の滑らかさと一意性についての未解決問題は7つのミレニアム問題の一つとして知られている[18]．また，ボルツマン方程式の衝突則を表す切断面に対し，角度切断近似を仮定しなくても初期値問題が議論できるようになったのは最近のことである[19,20]．

1.3 解かなくても分かることと解いて初めて分かること

前節では，解の定義・存在・一意性といった概念を，模型化された現象と結び付けて考察し，その意義について述べた．特に解の存在は最も基本的な問題

であるので，その数学的基礎の根源まで遡って説明した．しかし，解の存在が示されない限り話が一歩も進まないと主張しているわけではないので注意を要する．この節では，解かなくても分かることと解いて初めて分かることを3つに分けて考えよう．

(i) 解の存在・非存在とは無関係に論じられるもの

方程式に付随する保存量（あるいはリアプノフ関数）は部分積分や発散形式などの形式的計算によって求められる．同様に，方程式の解の集合を不変に保つ一径数変換群（ガリレイ群やポワンカレ群など空間の運動群の解への作用）およびその生成作用素としてのベクトル場も方程式そのものから決定されると考えられる．方程式が変分的であれば，対応するラグランジアンやハミルトニアンも解の存在・非存在とは無関係に論じることができる．

(ii) 解が存在するものと仮定して論じられるもの

初期値問題の時間局所解の存在が証明されている場合，その局所解が時間大域的に延長できるかどうかが次の問題となる．任意の時間区間に解が延長可能な場合，その解は時間大域解となり，そうでない場合（即ちある有限時刻を超えては延長不可能な場合），その解は爆発解と呼ばれる．通常，解の極大存在時刻が有限ならば，解の何らかのノルムが有界に留まらない（即ち，そのノルムが爆発する）事態が発生するからである．時間大域解への延長可能性を示すには，解を支配するノルムが任意の時間区間において初期値の対応するノルムによって統御可能であることを，不等式の形で与える必要がある．即ち，与えられた時刻まで解が存在したと仮定して，その解のノルムが初期値のノルムの言葉で評価可能であることを示す必要がある．この評価を先験評価（アプリオリ評価）という．一方，解の爆発の証明には，時間大域解が存在すると仮定して矛盾を導くという論法が多い．例えば非負値を取る汎関数（適当なノルムや積分量など）が有限時刻で負になるといった矛盾である．

(iii) 解の存在が保証されて初めて意味を持つもの

古典力学や量子力学における散乱・衝突問題では，波動作用素の存在およびその値域の特徴付けが最も基本的な問題であるが，これらは対応する終期値および初期値問題の時間大域解の存在と一意性の問題と同値となる[21,22]．即ち，散乱理論における基本的な計算を正当化するには，予めこれらの問題に対する解の存在が保証されていなければならない．また，解の漸近展開，解から定まる不変量や指数に関する議論は，解の存在が証明されていなければ意味をなさない．

1.4 微分方程式の記述する現象とは何か

以上，論じてきたように，現象の記述は，模型化し，微分方程式を導出することに始まる．現象を記述しているのは微分方程式そのものではなく，微分方程

式の解である．現象の実在とは，模型化された枠組みにおける微分方程式の解の存在と同値であり，現象の記述は，その解の数学的性質を調べることによって実現される．現象を良く記述している微分方程式とは，解の存在および現象に結び付いた解の性質が数学的に証明・表現できる方程式である．この意味で，現象の認識は模型の数学的認識と同値となる．もちろん，考察の枠組みをなす時空のスケール，特定の座標系の選択，対象とする物理量が異なれば，それに応じた異なる模型方程式が導かれる．現象の数学的認識は，視点の違いや切り口の違いによって異なってくるのは当然である．階層的な認識，多様な立場からの認識にはそれだけの模型化を必要とするが，それらを比較検討することによって，現象に対する一層深い理解に到達することが可能となる．

参考文献

1) M. Reed and B. Simon, "Methods of Modern Mathematical Physics. IV. Analysis of Operators", Academic Press, 1978.
2) 並木美喜雄，『解析力学』丸善出版，1991.
3) 砂川重信，『理論電磁気学（第3版）』紀伊國屋書店，1999.
4) 太田浩一，『マクスウェルの渦，アインシュタインの時計』東京大学出版会，2005.
5) C. Sulem and P.-L Sulem, "The Nonlienear Schrödinger Equation", Springer, 1999.
6) T. Cazenave, "Semilinear Schrödinger Equations", Courant Lecture Notes 10, American Math. Soc., 2003.
7) F. Linares and G. Ponce, "Introduction to Nonlinear Dispersive Equations", Springer, 2009.
8) 九後汰一郎，『ゲージ場の量子論 I, II』培風館，1989.
9) S. Ukai, A solution formula for the Stokes equation in $\mathbb{R}^n_+$, *Comm. Pure Appl. Math.* **40** (1987), 611–621.
10) G. Talenti, Best constant in Sobolev inequality, *Ann. Mat. Pura Appl.* **110** (1976), 353–372.
11) S. Klainerman, Global existence for nonlinear wave equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **33** (1980), 43–101.
12) C. Klein, B. Muite and K. Roidot, Numerical study of blow-up in the Davey-Stewartson system, *Discrete and Continuous Dynamical Systems B* **18** (2013), 1361–1387.
13) M.-H. Giga, Y. Giga and J. Saal, "Nonlinear Partial Differential Equations", Birkhäuser, 2010.
14) 石井仁司，粘性解の理論と応用，増田久弥編集『応用解析ハンドブック』第3章，丸善出版，2010.
15) 小澤徹，解析学における不等式の発想，数理科学 **598** (2013), 7–13.
16) S.-T. Yau, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge - Ampère equation I, *Comm. Pure Appl.* Math. **31** (1978), 399–411.
17) 笠原晧司，『微分方程式の基礎』朝倉書店，1982.
18) 宮川鉄朗，Navier-Stokes 方程式，増田久弥編集『応用解析ハンドブック』第6章，丸善出版，2010.
19) 森本芳則・鵜飼正二，切断近似をしないボルツマン方程式，数学 **64** (2012), 131–152.
20) R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu, and T. Yang, Local existence with mild regularity for the Boltzmann equation, *Kinetic and Related Models* **6** (2013), 1011–1041.
21) 谷島賢二，Schrödinger 方程式，増田久弥編集『応用解析ハンドブック』第8章，丸善出版，2010.
22) M. Reed and B. Simon, "Methods of Modern Mathematical Physics. III. Scattering Theory", Academic Press, 1979.

（おざわ・とおる，早稲田大学理工学術院）

線形代数5

2次形式とジョルダン標準形

海老原　円・太田　雅人

15.1 2次形式

今回は線形代数に関する問題のうち，2次形式とジョルダン（Jordan）標準形に関する問題を取り上げる．まず，2次形式について考察する．

問題 15.1 （大阪大学大学院基礎工学研究科システム創成専攻，平成21年度） 次の問いに答えよ．ただし，T は転置を意味するものとする．

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．x, y は3次元実数ベクトルとする．

a) A の固有値，および各固有値に属する固有ベクトルを求めよ．

b) 直交行列 P を一つ定め，変数変換 $x = Py$ を用いることにより，$F = x^T Ax$ を標準形にせよ．ただし，a) の結果を利用してもよい．

2) n 次の実対称行列 A の固有値がすべて正のとき，かつそのときに限り，A は正定値となることを示せ．ただし，任意の非零な n 次元実数ベクトル x に対して，$x^T Ax > 0$ となるとき，A は正定値であるという．

3) $\lambda_{max}, \lambda_{min}$ をそれぞれ n 次の実対称行列 A の最大の固有値，最小の固有値とする．$x^T x = 1$ を満たすとき，次の不等式が成り立つことを示せ．ただし，x は n 次元実数ベクトルとする．

$$\lambda_{min} \leq x^T Ax \leq \lambda_{max}$$

解答例 1) a) A の固有多項式（特性多項式）を $\Phi_A(t)$ とすると

$$\Phi_A(t) = \det(tE_3 - A) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 1 \\ 0 & t-1 & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = (t-2)(t-1)(t+1)$$

である（ここで E_3 は 3 次の単位行列を表す）．よって，A の固有値は 2, 1, -1 である．

次に，固有値 2 に属する固有ベクトルを求める．$Ax = 2x$（x は 3 次元ベクトル）を連立 1 次方程式とみて解くことにより，固有値 2 に属する固有ベクトルは $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(c_1 \neq 0)$ という形のベクトルであることが分かる．同様に，固有値 1 に属する固有ベクトルは $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(c_2 \neq 0)$，固有値 -1 に属する固有ベクトルは $c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(c_3 \neq 0)$ の形である．

b)　A が実対称行列であるので，上で求めた 3 つの相異なる固有値に属する固有ベクトルは互いに直交する．そこで，

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおけば，これらのベクトルのノルム（長さ）は 1 であり，互いに直交する．さらに

$$P = (p_1\, p_2\, p_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

とおけば，P は直交行列であり，$B = P^{-1}AP$ とおくと，

$$B = P^T AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

が得られる（P が直交行列であることより，$P^{-1} = P^T$ であることに注意する）．そこで $x = Py$ と変数変換し，$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$F = x^T Ax = (Py)^T A(Py) = y^T P^T APy = y^T By = 2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

が得られる．これが求める標準形である．

2)　n 次実対称行列 A の n 個の固有値を（重複を込めて）$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とする．このとき，ある直交行列 P が存在して

$$B = P^{-1}AP = P^T AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad （対角行列）$$

となる．そこで，n 次元実数ベクトル x に対して $x = Py$ と変数変換し，$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

とおくと，

$$x^TAx = y^TBy = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {y_i}^2$$

という関係が成り立つ．

いま，すべての λ_i が正であると仮定する．$x \neq 0$ のとき，$y = P^{-1}x$ も零ベクトルでないことに注意すれば，$y_1, \cdots, y_n$ のうち，少なくともどれか 1 つは 0 でないので，

$$x^TAx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {y_i}^2 > 0$$

が得られる．よって A は正定値である．

次に，ある j $(1 \leq j \leq n)$ に対して $\lambda_j \leq 0$ であると仮定する．第 j 成分が 1 であり，残りの成分がすべて 0 であるようなベクトルを e_j とし，$z = Pe_j$ とおくと，z は零ベクトルではなく，かつ

$$z^TAz = {e_j}^TBe_j = \lambda_j \leq 0$$

であるので，A は正定値でない．

以上のことより，n 次の実対称行列 A の固有値がすべて正のとき，かつそのときに限り，A は正定値となることが示された．

3)　上の小問 2) の解答で用いた記号をここでも用いることにする．さらに $x^Tx = 1$ が成り立つと仮定すると，$y = P^{-1}x$ および $P^T = P^{-1}$ に注意すれば

$$\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 = y^Ty = (P^Tx)^T(P^Tx) = x^TPP^Tx = x^Tx = 1$$

が得られる．このとき，

$$x^TAx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {y_i}^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_{max} {y_i}^2 = \lambda_{max} \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 = \lambda_{max}$$

となる．同様にして $x^TAx \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_{min} {y_i}^2 = \lambda_{min}$ も示される．　**解答終わり**

解答内の記号は問題文のものと合わせたが，行列 X の転置行列を表す記号としては ${}^tX$ も用いられる．今後はこちらの記号を用いることにする．

斉次 2 次式（1 次の項や定数項のない 2 次式）を **2 次形式**という．n 変数の 2 次形式 $F(x_1, \cdots, x_n)$ は，その 2 次形式の係数が属する体（**係数体**とよぶことにする）の標数が 2 でない場合は，n 次**対称行列** A を用いて

$$F(x_1, \cdots, x_n) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \quad \left(\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$$

と表すことができる．したがって，対称行列の考察を通じて 2 次形式を理解することが可能である．こうしたことから，2 次形式の理論は，しばしば線形代数の一部として取り扱われる．ただし，多くの線形代数の教科書においては，係数体が実数体 $\mathbb{R}$ で

ある場合に限定して議論を進めているので，ここでもそのような 2 次形式，すなわち**実 2 次形式**のみを考察することにする．

実 2 次形式については，**実対称行列が直交行列によって対角化できる**という事実が有用である．実際，問題 15.1 の解答もその事実を用いている．このあたりの状況をまとめると，次のようになる．

(i) 実対称行列 A によって定まる 2 次形式 ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ に対して，正則行列 P を用いて変数変換 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ をほどこすと，${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{y}B\boldsymbol{y}$ となる．ここで，$B = {}^tPAP$ である．

(ii) 実対称行列 A は，ある直交行列 Q を用いて対角化できる．すなわち，$Q^{-1}AQ = {}^tQAQ$ が対角行列となる．

(iii) したがって，(i) の変数変換に用いる正則行列 P として (ii) の直交行列 Q を選べば，2 次形式は $\lambda_1 {y_1}^2 + \lambda_2 {y_2}^2 + \cdots + \lambda_n {y_n}^2$ という形に変換される．ここで，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は A の固有値である（**実対称行列の固有値はすべて実数である**）．

このようにして得られた簡単な 2 次形式（**標準形**）は，**直交標準形**ともよばれる．直交標準形は，直交座標系における **2 次超曲面**（2 次式によって定義された図形）の考察などに役立つ．

一方，上述の (i) の変換に用いる行列 P を直交行列に限定せず，より一般の正則行列の中から選んで，2 次形式をより簡単にしようとする立場もあり得る．

(iv) n 変数の実 2 次形式 ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ に対して，正則行列 P をうまく選んで変数変換 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ を施せば，

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = {y_1}^2 + \cdots + {y_p}^2 - {y_{p+1}}^2 - \cdots - {y_{p+q}}^2$$

という形に変形できる．ここで y_i は $\boldsymbol{y}$ の第 i 成分を表す．さらに，上の式にあらわれた p, q は，変数変換に用いる正則行列 P の選び方によらず一定であり（**シルベスタ**（Sylvester）**の慣性法則**），p は重複を込めて数えたときの A の**正の固有値の個数**，q は**負の固有値の個数**に等しい．

上記の (iv) の中で得られた形は**シルベスタ標準形**とよばれ，p と q の組 (p, q) は，この 2 次形式の**符号**とよばれる．

直交標準形とシルベスタ標準形は，どちらもしばしば単に「標準形」とよばれ，**用途に応じて使い分けられる**．したがって，問題作成にあたっては，**解答者にどちらの標準形を求めさせるのかを明示する必要がある**．

さて，問題 15.1 は，その文脈から，直交標準形に関する問題であると判断されるが，仮に問題 15.1 の小問 1) の行列 A に対して，「2 次形式 ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ の符号を求めよ」という問題が与えられたとしたら，次のような解答もあり得る．

直交行列による対角化を経由せずに符号を求める解答の例　問題 15.1 1) の行列 A の定める 2 次形式を**平方完成**すると

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 - 2x_3^2$$

となる．そこで，$y_1 = x_1 - x_3$, $y_2 = x_2 - x_3$, $y_3 = \sqrt{2}x_3$ と変数変換することにより，この 2 次形式は，シルベスタ標準形 ${y_1}^2 + {y_2}^2 - {y_3}^2$ に変形される．よって，この 2 次形式の符号は $(2, 1)$ である． **解答終わり**

ここでくわしくは述べないが，このような変形は，**対称行列を行と列に関して同時に掃き出す操作に対応している**．対称行列 A に対して，基本行列 X を用いて ${}^tXAX$ を得る操作は，行と列に対して対称に基本変形を施すことにほかならないが，そのような変形を繰り返すことによって，シルベスタ標準形に対応する対角行列（対角成分が 1, −1, 0 のいずれかである対角行列）に到達する．

15.2 ジョルダン標準形

次に，ジョルダン標準形に関する問題を取り上げる．

問題 15.2 （東京大学大学院情報理工学系研究科，平成 20 年度） 次の行列を A とおく．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

以下の問に答えよ．

(1) A^2, A^3, A^4 を求めよ．

(2) 前問の結果を一般化し，非負整数 n に対して A^{3n}, A^{3n+1}, A^{3n+2} を求めよ．

(3) A の固有多項式は何か．

(4) A の最小多項式は何か．その理由も簡単に述べよ．（A の最小多項式とは，$m(A) = O$ を満たす多項式 $m(x)$ のうちで，次数が最小であり最大次数の項の係数が 1 のもののことである．）

(5) A のジョルダン標準形 J および $PJ = AP$ を満たす正則行列 P を求めよ．

解答例 (1) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $A^{3n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 & 0 \\ n & 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{3n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n+1 & 0 & 0 & 1 \\ n & 1 & 0 & 0 \\ n & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{3n+2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n+1 & 0 & 1 & 0 \\ n+1 & 0 & 0 & 1 \\ n & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

であることを数学的帰納法により証明する．小問 (1) の結果より，$n = 0$ のときは正しい．非負整数 k に対して上の主張が正しいと仮定すると，$A^{3k+3} = A^{3k+2}A =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k+1 & 0 & 1 & 0 \\ k+1 & 0 & 0 & 1 \\ k & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k+1 & 1 & 0 & 0 \\ k+1 & 0 & 1 & 0 \\ k+1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{3k+4} = A^{3k+3}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k+2 & 0 & 0 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 & 0 \\ k+1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{3k+5} = A^{3k+4}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k+2 & 0 & 1 & 0 \\ k+2 & 0 & 0 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が得られる．これは $n = k+1$ に対しても上の主張が成り立つことを意味する．

(3)　A の固有多項式を $\Phi_A(x)$ とすると

$$\Phi_A(x) = \det(xE_4 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & -1 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$
$$= (x-1)(x^3-1) = x^4 - x^3 - x + 1$$

である．ここで，E_4 は 4 次の単位行列を表す．また，計算の途中で，行列式の第 1 行に関する展開を用いている．

(4)　固有多項式を因数分解すると $\Phi_A(x) = (x-1)^2(x-\omega)(x-\omega^2)$ である．ここで，$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ であり，$\omega^3 = 1$ を満たす．したがって，A の最小多項式は $(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2) = x^3-1$ または $(x-1)^2(x-\omega)(x-\omega^2) = x^4-x^3-x+1$ のいずれかである．ところが，小問 (1) の結果より，$A^3 - E_4$ **は零行列でないので，最小多項式は** x^3-1 **ではあり得ない**．よって A の最小多項式 $m(x)$ は固有多項式と一致し，$m(x) = x^4-x^3-x+1 = (x-1)^2(x-\omega)(x-\omega^2)$ である．

(5)　A の固有多項式が $\Phi_A(x) = (x-1)^2(x-\omega)(x-\omega^2)$ であることより，A のジョルダン標準形 J は，ジョルダン細胞（ジョルダンブロック）の順序を別とすれば，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$ である．しかし，**対角化可能な行列の最小多項式は重根を持たない**ので，小問 (4) の結果を考え合わせれば，この場合，$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$ が得られる．

次に $PJ = AP$ となる正則行列 P の例を 1 つ求める．P の第 j 列を $\boldsymbol{p}_j$ とおく $(1 \leq j \leq 4)$：$P = (\boldsymbol{p}_1\,\boldsymbol{p}_2\,\boldsymbol{p}_3\,\boldsymbol{p}_4)$．このとき

$$PJ = (\boldsymbol{p}_1\,\boldsymbol{p}_2\,\boldsymbol{p}_3\,\boldsymbol{p}_4)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{p}_1\;\; \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2\;\; \omega\boldsymbol{p}_3\;\; \omega^2\boldsymbol{p}_4),$$
$$AP = (A\boldsymbol{p}_1\;\; A\boldsymbol{p}_2\;\; A\boldsymbol{p}_3\;\; A\boldsymbol{p}_4)$$

であるので，

$$\begin{cases} A\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_1, \\ A\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2, \\ A\boldsymbol{p}_3 = \omega \boldsymbol{p}_3, \\ A\boldsymbol{p}_4 = \omega^2 \boldsymbol{p}_4 \end{cases}$$

が成り立つことが分かる．第1式，第3式，第4式をそれぞれ連立1次方程式とみて解くことにより $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4$ が得られ，さらに，第1式の解を第2式に代入して方程式を解けば $\boldsymbol{p}_2$ が得られる．これらの解は一意的ではないが，例えば

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2 \\ \omega \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし，$P = (\boldsymbol{p}_1\,\boldsymbol{p}_2\,\boldsymbol{p}_3\,\boldsymbol{p}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \omega^2 & \omega \\ 1 & 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすればよい． **解答終わり**

ジョルダン標準形に関する基本事項をまとめておく．

(a) 2つの**複素** n 次正方行列 A, B に対して，ある複素 n 次正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ を満たすとき，A と B とは**相似**であるということにする．

(b) 一般に，正方行列は対角化可能であるとは限らない．しかし，任意の複素正方行列 A は，**ジョルダン標準形**とよばれる行列 J と相似である．J は**ジョルダン細胞**（**ジョルダンブロック**）とよばれる行列の**直和**である．また，ジョルダン細胞の並べ方を別とすれば，ジョルダン標準形 J は A に対して一意的に定まる．

(c) 2つの複素正方行列が相似であるとき，それらの**固有多項式**（**特性多項式**）は等しい．また，それらの**最小多項式**も等しい．**したがって，ジョルダン標準形の固有多項式や最小多項式を調べることにより，一般の複素正方行列の固有多項式と最小多項式についてある程度知ることができる．また逆に，複素正方行列 A の固有多項式や最小多項式を調べれば，A のジョルダン標準形 J の形をある程度特定することができる．**

具体的には，例えば次のことが分かる．

(d) 複素 n 次正方行列 A の固有多項式 $\Phi_A(x)$ が

$$\Phi_A(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - \alpha_i)^{n_i}$$

($\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ は A の相異なる固有値) と分解されるとき，A の最小多項式 $m(x)$ は

$$m(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - \alpha_i)^{m_i} \quad (1 \leq m_i \leq n_i;\ i = 1, \cdots, s)$$

の形である．特に $\Phi_A(A) = O$（O は零行列）が成り立つ（ケーリー・ハミルトン（Cayley–Hamilton）の定理）．また，A が対角化可能であることと，A の最小多項式が $\mathbb{C}$ 内に重根をもたないこと（すなわち任意の i に対して $m_i = 1$ であること）とは同値である．

問題 15.2 の解答例においても，このことを利用してジョルダン標準形を特定している．ただし，最小多項式が分かったからといって，必ずしもジョルダン標準形が求められるわけではない．**ジョルダン標準形が異なっていても，最小多項式が一致する場合がある**からである．その場合は，例えば次のようなことが有用である．

(e)　上述の (d) のように n 次複素正方行列 A の固有多項式が分解されるとき，

$$\mathrm{rank}\,(A - \alpha_i E_n)^k \quad (i = 1, \cdots, s;\ \ 1 \leq k \leq n_i)$$

を調べれば，A のジョルダン標準形が完全に決定できる．ここで $\mathrm{rank}\,X$ は行列 X の階数を表し，E_n は n 次の単位行列を表す．

さて，A のジョルダン標準形 J の形が決まれば，$P^{-1}AP = J$ を満たす正則行列 P を求めることはそれほど難しくない．小問 (5) の解答例を参考にしていただきたい．

ジョルダン標準形については，その存在と一意性を証明するだけでかなりの労力を要するが，**証明を追跡することと，理論の全容を理解することとは違う**．学習にあたっては，基本的な定理の証明が済んだのちに，もう一度理論を振り返ってみることをお勧めする．そのことによって，全体が見通しよく整理される．

15.3 終わりに

今回は 2 次形式とジョルダン標準形に関して，それぞれ 1 問ずつ取り上げた．次回は微分方程式に関する話題を取り扱う．

（えびはら・まどか，埼玉大学大学院理工学研究科）
（おおた・まさひと，東京理科大学理学部）

例題形式で探求する微積分学の基本定理
関数の性質から幾何構造を探る
第10回

面積分(2)

森田 茂之

10.1 ガウスの定理

第 5 回で述べたグリーンの定理を思い出そう．

定理 10.1（**グリーンの定理**） C を平面 $\mathbb{R}^2$ 上の区分的に C^1 級の単純閉曲線で，時計と反対回りに向き付けられているものとし，C が囲む区域を D とする．また，f, g を D を含む開集合 U 上で定義された C^1 級の関数とする（図 10.1 参照）．このとき，次の等式

$$\int_C f dx + g dy = \iint_D \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx dy$$

が成立する．

この定理は 2 つの方向に一般化することができる．一つは次に述べるガウスの定理である．それは，平面とその中の単純閉曲線の替わりに空間とその中の閉曲面を考え，また 1 次の微分式の線積分の替わりに 2 次の微分式の面積分を考えて得られる定理である．もう一つの一般化は，次回に取り上げるストークスの定理である．それは平面とその中の単純閉曲線の替わりに空間の中の単純閉曲線を考え，そこでの 1 次の微分式の線積分に関する定理である．

定理 10.2（**ガウスの定理（単純な場合）**） S を空間 $\mathbb{R}^3$ 内の外向きに向き付けられた閉曲面とし，D を S が囲む区域とする．U を D を含む開集合とし，f, g, h を U 上で定義された C^1 級の関数とする（図 10.2 参照）．このとき，次の等式

$$\iint_S f dy dz + g dz dx + h dx dy = \iiint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx dy dz$$

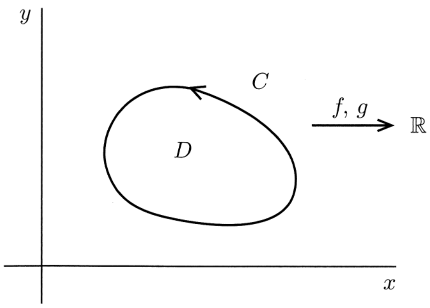


図 10.1　グリーンの定理.

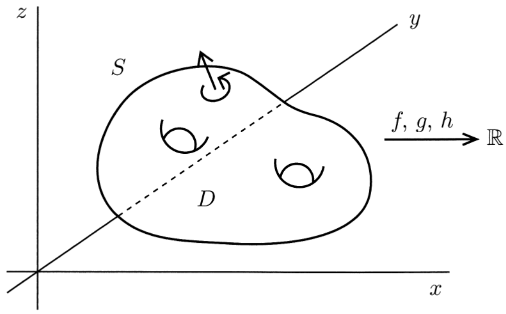


図 10.2　ガウスの定理.

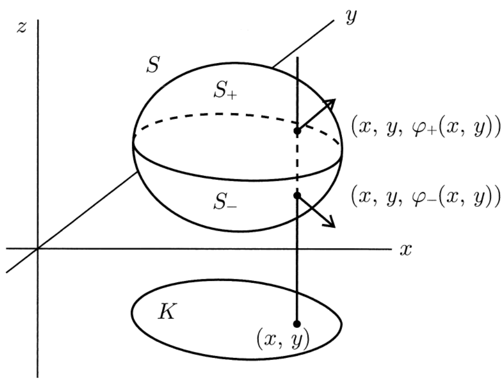


図 10.3　単純な閉曲面.

が成立する.

ガウスの定理は等式の両辺とも 3 つの項を持っているが，実は対応する項がそれぞれ等しいのである．このことは，例えば $f = g = 0$ とすれば

$$\iint_S h dxdy = \iiint_D \frac{\partial h}{\partial z} dxdydz \tag{10.1}$$

が成立することから容易に分かる.

> **例題 10.1**　上記で S が図 10.3 に示すような形をしている場合に，定理の主張を証明せよ.

解答　座標に関する対称性から，上記の式 (10.1) を証明すればよい．そこで図 10.3 のように S を 2 つの部分 $S_- \cup S_+$ の和集合として表示すれば，S_+ および S_- はそれぞれ xy 平面上の区域 K 上で定義された関数 φ_+ および φ_- のグラフの形をしている．このとき

$$\iiint_D \frac{\partial h}{\partial z} dxdydz = \iint_K \left(h(x,y,\varphi_+(x,y)) - h(x,y,\varphi_-(x,y)\right) dxdy$$

となる．一方

$$\iint_K h(x,y,\varphi_+(x,y))dxdy = \iint_{S_+} h(x,y,z)dxdy,$$

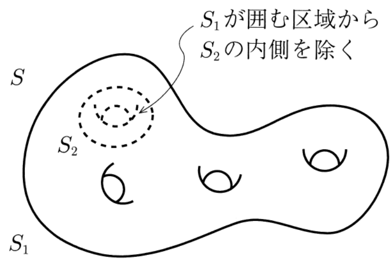


図 10.4　有限個の閉曲面で囲まれたコンパクトな区域.

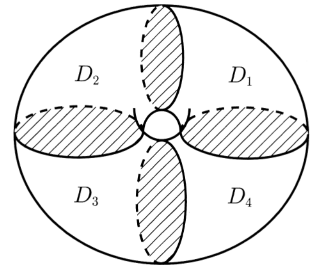


図 10.5　ドーナツ面の場合.

$$\iint_K h(x,y,\varphi_-(x,y))dxdy = -\iint_{S_-} h(x,y,z)dxdy$$

が得られる．したがって

$$\begin{aligned}\iiint_D \frac{\partial h}{\partial z}dxdydz &= \iint_{S_+} h(x,y,z)dxdy + \iint_{S_-} h(x,y,z)dxdy\\ &= \iint_S h(x,y,z)dxdy\end{aligned}$$

となり，主張が成立することが分かる．

ガウスの定理は図 10.2 のように “つながっている”（連結という）閉曲面でなくても成立する．一般の形で述べると次のようになる．

定理 10.3（ガウスの定理（一般の形））　D を $\mathbb{R}^3$ 内のコンパクトな区域で，有限個の連結な閉曲面 S_i $(i=1,\cdots,k)$ によって囲まれているものとする（図 10.4 参照）．各閉曲面 S_i は右ねじの向きに出した法線ベクトルが D から見て外側に出るように向き付けられているものとする．U を D を含む開集合とし，f,g,h を U 上で定義された C^1 級の関数とする．このとき，次の等式

$$\iint_S fdydz + gdzdx + hdxdy = \iiint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)dxdydz$$

が成立する．ただし $S=\bigcup_i S_i$ とする．

読者はいろいろな形状の閉曲面 S に対して，上記のガウスの定理の証明を工夫してみてほしい．例えば，図 10.5 に示すような形をしている場合には，斜線で示したような補助の面を考えて区域 D を 4 つの部分 D_1, D_2, D_3, D_4 に分割し，それぞれの小区域に対して上記の証明を少し修正して結果を加えればよい．その際，補助面の部分の面積分の値は，それに面する 2 つの小区域の境界としての向きが逆になるため，うまくキャンセルして元々の境界の S 上の面積分の値のみが残るのである．しかし一般の場合を証明するためには，多様体の考え，とくに局所座標あるいは 1 の分割といった概念の導入が不可欠である．本連載がそのような学習への動機付けの一助となれば幸いである．

ガウスの定理の別の表現法を考えよう．ガウスの定理 10.3 において

$$X = (f, g, h)$$

とおけば，これは U 上のベクトル場と思うことができる．また各点 $\mathrm{P} \in S$ における外向きの長さ 1 の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とし，その各座標軸の正の方向とのなす角度をそれぞれ α, β, γ とすれば，前回記したように

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

となる．さらに定理 10.3 の左辺は

$$\int_S (f\cos\alpha + g\cos\beta + h\cos\gamma)\,d\sigma = \int_S X \cdot \boldsymbol{n}\,d\sigma$$

と表すことができる．ただし，$X \cdot \boldsymbol{n}$ は X と $\boldsymbol{n}$ との内積を表す．一方，右辺の被積分関数は

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \operatorname{div} X$$

と書ける．こうして次のようなベクトル記法によるガウスの定理が得られる．

定理 10.4（ガウスの定理（ベクトル記法）） D を $\mathbb{R}^3$ 内のコンパクトな区域で，有限個の連結な閉曲面 S_i $(i = 1, \cdots, k)$ によって囲まれているものとする（図 10.4 参照）．各閉曲面 S_i は右ねじの向きに出した法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ が D から見て外側に出るように向き付けられているものとする．U を D を含む開集合とし，X を U 上で定義された C^1 級のベクトル場とする．このとき，次の等式

$$\int_D \operatorname{div} X\,dv = \int_S X \cdot \boldsymbol{n}\,d\sigma$$

が成立する．ただし $S = \bigcup_i S_i$ とする．

上記において，ベクトル場 X が非圧縮性の（膨張したり収縮することのない）均質な液体の流れを表しているものとすれば，左辺は単位時間当たりの D 内のわきだし（負の場合はすいこみ）の総量を表しているものと考えられる．これに対して，右辺は D の境界である S からの流出量（負の場合は流入量）を表している．したがって，ガウスの定理はこの場合，これら 2 つの量が一致するという極めて自然な等式となる．

ここで物体の見かけの大きさを計る尺度である“立体角”について考えよう．図 10.6 のように表面が滑らかな物体 V を原点 O から見ることを想定する．原点を中心とする半径 ε の球面 S_ε を考え，V 上の各点と O を結ぶ線分とこの球面との交点の全体を S' とする．このとき

$$4\pi \frac{\operatorname{Area} S'}{\operatorname{Area} S_\varepsilon}$$

を V の立体角と呼ぶ．例えば，物体の像が S_ε 全体を覆えば立体角は 4π であり，半球面だけを覆うときは立体角は 2π である．立体角は，次のようにし

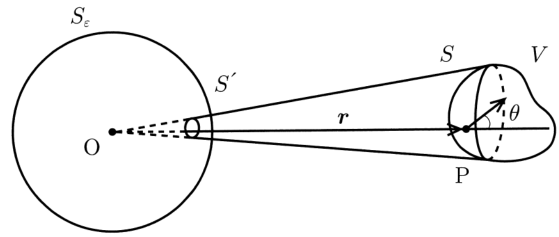


図 10.6　見かけの大きさ.

て面積分により計算することができる．具体的には，V の表面のうち O から見える部分を S として立体角を S 上の面積分の形で表すのである．S 上の点 $\mathrm{P} \in S$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$（その長さは r)，P における S への長さ 1 の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする．ただし，法線ベクトルは O から見て反対側に出すものとする．そして $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{n}$ とのなす角度を θ とする．また P を含む S 上の小区域を σ，対応する S_ε 上の小区域を σ' とする．このとき

$$\mathrm{Area}\,\sigma' : \cos\theta\ \mathrm{Area}\,\sigma \ \sim\ \varepsilon^2 : r^2$$

となる．したがって

$$V\ \text{の立体角} = \int_{S'} \frac{d\sigma'}{\varepsilon^2} = \int_S \frac{\cos\theta}{r^2} d\sigma$$

という公式が得られる．

例題 10.2　半径 a の球体の形をした星を，その中心から d の距離から見たときの立体角を求めよ．

解答　観測者が $\mathbb{R}^3$ の原点 O にいるとして，$\mathbb{R}^3$ 内の点 $(0,0,d)$ を中心とする半径 a $(0<a<d)$ の球体

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+(z-d)^2 \le a^2\}$$

の原点から見た立体角を求めればよい．図 10.7 に示すように，V の中心を $\mathrm{P}(0,0,d)$ とし，O から V と平面 $y=0$ との共通部分の円の $x<0$ の部分に引いた接線と，この円との接点を Q とする．そして Q から z 軸に降ろした垂線の足を R とする．このとき三角形 $\triangle\mathrm{OPQ}$ と $\triangle\mathrm{OQR}$ は相似である．したがって

$$\overline{\mathrm{OP}} : \overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{OQ}} : \overline{\mathrm{QR}}$$

となる．一方

$$\overline{\mathrm{OP}} = d, \quad \overline{\mathrm{PQ}} = a, \quad \overline{\mathrm{OQ}} = \sqrt{d^2-a^2}$$

であるから

$$\overline{\mathrm{QR}} = \frac{a\sqrt{d^2-a^2}}{d}, \quad \overline{\mathrm{OR}} = \sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2 - \overline{\mathrm{QR}}^2} = \frac{d^2-a^2}{d}$$

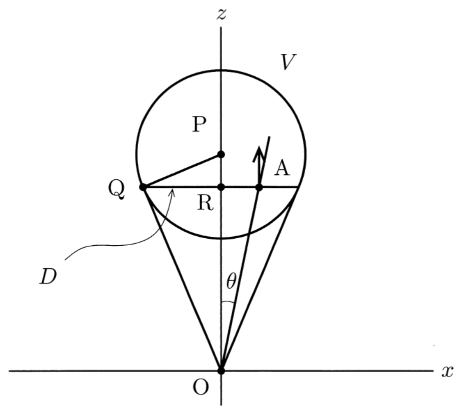


図 10.7　星の見かけの大きさ.

となる．そこで R を通る xy 平面と平行な平面 $z=\frac{d^2-a^2}{d}$ と，V との共通部分を D とすれば，これは R を中心とする半径 $\frac{a\sqrt{d^2-a^2}}{d}$ の円板となる．さらに O から V に引いた接線と V との接点をすべて集めたものはちょうど D の境界に一致する．これらのことから，V を O から見た立体角は D を O から見た立体角と等しくなる．そこで後者を求めよう．D 上の任意の点 A に対し

$$\overline{\mathrm{OA}}=r,\quad \angle\mathrm{AOR}=\theta,\quad \overline{\mathrm{RA}}=s$$

とおく．このとき，A の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と A における D への法線ベクトル（ただし原点 O と反対側に出す）とのなす角度は θ に等しいことに注意する．したがって，求める立体角は

$$\iint_D \frac{\cos\theta}{r^2}dxdy$$

となる．ここで D 上の面積分に用いる $d\sigma$ は $dxdy$ に一致することを用いた．一方

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{OR}}}{r},\quad r^2=s^2+\overline{\mathrm{OR}}^2$$

を使って r を s で表し，さらに上記積分を D 上で極座標 (s,φ) に変換すれば

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\cos\theta}{r^2}dxdy &= \overline{\mathrm{OR}}\iint_D\left(s^2+\overline{\mathrm{OR}}^2\right)^{-\frac{3}{2}}dxdy\\ &=\overline{\mathrm{OR}}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\overline{\mathrm{QR}}}s\left(s^2+\overline{\mathrm{OR}}^2\right)^{-\frac{3}{2}}ds\\ &=2\pi\overline{\mathrm{OR}}\left[-\left(s^2+\overline{\mathrm{OR}}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{\overline{\mathrm{QR}}}\\ &=2\pi\overline{\mathrm{OR}}\left(-\left(\overline{\mathrm{QR}}^2+\overline{\mathrm{OR}}^2\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{\overline{\mathrm{OR}}}\right)\\ &=2\pi\left(-\frac{\overline{\mathrm{OR}}}{\overline{\mathrm{OQ}}}+1\right)\end{aligned}$$

$$= 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{d^2 - a^2}}{d} \right)$$

となる．これが求める立体角である．

例題 10.3　S を空間 $\mathbb{R}^3$ 内の外向きに向き付けられた閉曲面で原点を含まないものとする．S 上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$，その長さを r とし，また外向きの長さ 1 の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{r}$ とのなす角度を θ とする．このとき，等式

$$\frac{\cos\theta}{r^2} = -\mathrm{grad}\,\frac{1}{r} \cdot \boldsymbol{n}$$

が成立することを証明せよ．

解答　まず

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = r\cos\theta$$

である．一方 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であるから

$$r_x = \frac{x}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}, \quad r_z = \frac{z}{r}$$

となり，これから

$$\mathrm{grad}\,\frac{1}{r} = \left(-\frac{1}{r^2} r_x, -\frac{1}{r^2} r_y, -\frac{1}{r^2} r_z \right) = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

が得られる．したがって

$$\frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{r^3} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = -\mathrm{grad}\,\frac{1}{r} \cdot \boldsymbol{n}$$

となり証明が終わる．

例題 10.4　S を空間 $\mathbb{R}^3$ 内の外向きに向き付けられた閉曲面とし，原点を含まないものとする．このとき面積分

$$\int_S \frac{\cos\theta}{r^2} d\sigma$$

の値を計算せよ．

解答　まず，原点が S が囲む区域 D に含まれない場合を考える．このとき，例題 10.3 とガウスの定理により

$$\int_S \frac{\cos\theta}{r^2} d\sigma = -\int_S \mathrm{grad}\,\frac{1}{r} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$$
$$= -\int_D \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}\, dv$$

となる．ところが第 4 回に記したように，div grad はラプラシアン $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ に一致し，さらに例題 2.1 で取り上げたように $\frac{1}{r}$ は調和関数すなわち $\Delta \frac{1}{r} = 0$ である（証明を再検証するとよいだろう）．したがって

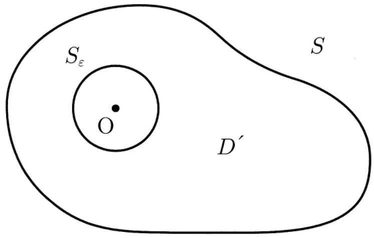


図 10.8　D の内部に原点がある場合.

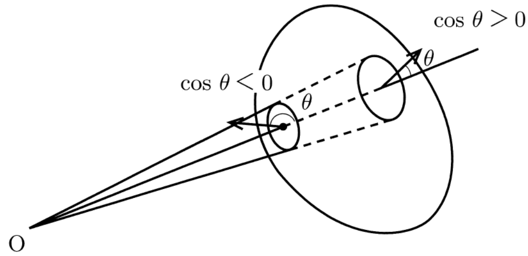


図 10.9　立体角の相殺.

この場合求める面積分の値は 0 となる.

次に原点が D の内部にある場合を考える．この場合はベクトル場 $\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}$ が原点で定義されないため，上記のようにガウスの定理がこのままでは適用できない．そこで図 10.8 のように原点を中心とする半径 ε の球面 S_ε を考える．その際，半径は充分小さくとって S_ε が D の内部に含まれるようにする．S と S_ε によって囲まれた区域を D' とすれば，ベクトル場 $\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}$ は D' 上で定義される．そこで S_ε の向きは，対応する法線ベクトルが内向きになるように付けて，ガウスの定理を適用すれば，等式

$$\int_{S\cup S_\varepsilon} \frac{\cos\theta}{r^2} d\sigma = -\int_{D'} \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}\,dv = 0$$

が得られる．したがって

$$\int_S \frac{\cos\theta}{r^2} d\sigma = -\int_{S_\varepsilon} \frac{\cos\theta}{r^2} d\sigma$$

となる．右辺の面積分において，r, θ は S_ε 上の点によらずに一定で $r = \varepsilon, \theta = \pi$ となる．後者は法線ベクトルが内向きになるように S_ε を向き付けたことによる．したがって右辺の値は 4π となる．こうして求める答えは次のようになることが分かった.

$$\int_S \frac{\cos\theta}{r^2} d\sigma = \begin{cases} 0 & \text{（原点が } S \text{ が囲む区域にない場合）} \\ 4\pi & \text{（原点が } S \text{ が囲む区域にある場合）} \end{cases}$$

上記例題 10.4 の解答において，前半の部分の結果に疑問を持つ読者もいるかも知れない．というのは，問題の面積分は曲面 S の立体角を計るはずで，それが 0 というのはおかしいのではないかというわけである．これは次のように説明できる．図 10.9 を見ていただきたい．閉曲面 S の原点から見た立体角を計るためには，S のうち原点から見える部分のみで面積分を実行しなければならない．S 全体で積分すると，原点から見えない部分での面積分が加わってしまうため，それらが相殺して結局積分の値は 0 になってしまうのである.

（もりた・しげゆき，東京大学・東京工業大学名誉教授）

特　集(2014年8月号予告)		
ベクトル解析の力		
多彩な問題を通じてその姿に迫る		
	巻頭言	二木　昭人
	微積分からベクトル解析へ	加須栄　篤
	ベクトル解析から曲面論へ	井ノ口順一
	多様体上の微積分	小林　　治
	勾配ベクトルから低次元トポロジーへ	遠藤　久顕
	ベクトル解析からシンプレクティック幾何へ	太田　啓史
	ベクトル解析からリーマン幾何へ	山口　孝男
	電磁気学，流体力学とベクトル解析	細野　　忍
	相対性理論とベクトル解析	山田　澄生
	[コラム]	砂田　利一

特　集(2014年6月号)		
数学と物理における空間概念		
	空間からみる数学と物理	河野　俊丈
	特殊相対論と時空の幾何学	加藤　晃史
	時空は曲がる　時空の分解を考える	白水　徹也
	量子力学とヒルベルト空間	加藤　光裕
	古典力学からシンプレクティック幾何学へ	今野　　宏
	超弦理論と時空のコンパクト化	太田　信義
	カラビ・ヤウ多様体と導来圏	戸田　幸伸
	ミラー対称性	堀　健太朗
	《数学的な感覚の探求》　第16回	川﨑　徹郎
	《連載》　経路積分と量子解析　その1	鈴木　増雄
	大学院入試問題からみた大学の数学　その14	海老原　円 太田　雅人

編集後記

今回の特集はいかがでしたでしょうか．

自然科学には様々な“謎”がありますが，今回の特集で取り上げた“モノポール”はまさにその一つではないかと思います．様々な立場からアプローチできることがわかり，それぞれで好奇心をかき立てられていることが特集から見て取れたのではないでしょうか．

ところで一般に人は，ある“謎”が解決されたとしても，その先に登場する新たな“謎”に挑戦したくなるかと思います．モノポールの“謎”の先に何があるのかはわかりませんが，私たちは“謎”の解決に無事に行き着くのでしょうか．今後の展開が楽しみです．　(R)

＊　＊

昨年，これまで未発見であったヒッグス粒子が発見され，ノーベル賞受賞とともに大きな話題となりました．本特集のテーマであるモノポールも未発見の粒子ですが，そのようないまだ発見されていない物質や未解決の問題は数多く残されています．

今後，科学者の方々の努力により，数年後かあるいはさらに先かもしれませんが，これらの問題は少しずつ解決されていくのだと思います．本誌もそれに寄り添っていけるよう，私自身も先端の科学を追いかけられるように努力しなくてはと感じています．　(T)

数　理　科　学　7月号

2014年7月1日発行

数理科学編集部　　発行人 木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁